Interrogation 17 d'entrainement
Couples de variables aléatoires

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Définir la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$.
   1.2 Définir l'espérance de X, la variance de X (+formule) et la fonction génératrice de X.
   1.3 Que dire de l'espérance, la variance de deux variables indépendantes ?
   1.4 Enoncer le théorème de transfert.
   1.5 Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
   1.6 Enoncer la propriété sur la somme de deux binomiales.
   1.7 Pourquoi le/la probabiliste fait un bon époux/épouse ?

   Révisions

   1.9 Définir une application linéaire.
   1.10 Définir le noyau et l'image d'une application linéaire.
   1.11 Définir et caractériser une projection.
   1.12 Définir et caractériser une symétrie.
   1.13 Caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire.
   1.14 Définir les termes suivants : isomorphismes, endomorphismes, automorphismes.
   1.15 Que dire de l'ensemble $\mathrm{GL}(E)$?

2. **Reconnaitre une loi usuelle.**
   2.1 On range au hasard 20 chaussettes dans 3 tiroirs. X est le nombre de chaussettes dans le premier tiroir. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de X. Quelle est la probabilité que le premier tiroir soit vide ?
   2.2 On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as cœur. X est le nombre de cartes que l'on a retournées. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de X. Quelle est la probabilité d'avoir $X = 10$?
   2.3 Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos et on note X le nombre de bosses. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de X. Quelle est la probabilité d'avoir $X \leqslant 1$?
   2.4 On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes avec remise. X la variable aléatoire réelle égale au nombre de rois obtenus. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de X. Quelle est la probabilité d'avoir $X \geqslant 3$.
   2.5 On considère qu'en moyenne un étudiant sur neuf est gaucher. Dans une classe de 38 étudiants, on sait que 6 personnes font allemand. X est le nombre de gauchers parmi les germanistes. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de X. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous gauchers ?

3. **Manipuler un couple de variables aléatoires.**
   3.1 On pioche de façon indépendante deux nombres dans l'ensemble $\{-1; 1\}$. On note X la somme et Y le produit. Donner la loi conjointe de X et Y dans un tableau. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   3.2 Soit $a > 0$. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $[\![1; n]\!]^2$ dont la loi conjointe est donnée pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ par $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{a}{2^{i+j}}$. Déterminer les lois marginales en fonction de a (que l'on ne cherchera pas à déterminer).
   3.3 Soient $X \sim \mathscr{U}([\![1; 3]\!])$ et $Y \sim \mathscr{B}(3, p)$. On suppose X et Y indépendantes. Donner la loi conjointe de (X, Y) sous forme de tableau.
   3.4 Soient $(p_1, p_2) \in [0; 1]^2$, $X_1 \sim \mathscr{B}(p_1)$, $X_2 \sim \mathscr{B}(p_2)$ et $\varepsilon \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. On pose $Y = \varepsilon X_1 + (1 - \varepsilon) X_2$. On suppose ε indépendant de X_1 et de X_2. Déterminer la loi de Y.
   3.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X \sim \mathscr{U}([\![0; n]\!])$ et $\varepsilon \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. On suppose X et ε indépendants. On pose $Y = (-1)^{\varepsilon} X$. Déterminer la loi de Y.

4. **Espérance et variance.**
   4.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1;n \rrbracket)$. Refaire le calcul de l'espérance et la variance de X et en déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev associée.
   4.2 Soit $p \in [0;1]$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $X_n \sim \mathscr{B}(n,p)$.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0$.
   4.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $X_n \sim \mathscr{U}(\llbracket 1;n \rrbracket)$ et $Y_n = \cos\left(\frac{X_n}{n}\right)$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n)$.
   4.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $X_n \sim \mathscr{U}(\llbracket 1;n \rrbracket)$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant p)$.
   4.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose X_n une variable aléatoire vérifiant pour tout $k \in \llbracket 1;n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_n = k) = a_n\,\mathrm{e}^{-\sqrt{k}}$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dans $\mathbb{R}_+^*$ convergeant vers un réel $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X_n > \dfrac{n}{10}\right) = 0$.
   4.6 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $X_n \sim \mathscr{U}(\llbracket 1;n \rrbracket)$ et on pose $Y_n = \frac{n}{X_n^2}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n > \varepsilon\, n) = 0$.
5. **En vrac.**
   5.1 On se munit d'une pièce retournant pile avec une probabilité $p \in [0;1]$. On lance de façon indépendante n fois la pièce et on note X le rang d'apparition du premier pile. On pose $X = 0$ si sur les n lancers nous n'avons eu aucun pile. Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$ puis pour tout $k \in \llbracket 1;n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = k)$.
   5.2 On possède N urnes. Chaque urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On pioche successivement et de façon indépendante dans chaque urne. On note X le plus grand numéro obtenu. Pour tout $k \in \llbracket 1;n \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ et en déduire la loi de X.
   5.3 On note S_n la valeur d'une action en bourse le jour n. Au jour 0, on a $S_0 = 1$ et on suppose que chaque jour la valeur de l'action est multipliée par α avec une probabilité $p \in]0;1[$ et par β sinon. Ceci indépendamment de la valeur de l'action et des jours précédents. Calculer l'espérance de S_{n+1} en fonction de celle de S_n et en déduire l'espérance de S_n.
   5.4 A ses heures perdues, Alexandre joue aux fléchettes et lance de façon indépendante n fléchettes. Il atteint sa cible avec une probabilité p. Alexandre gagne un point à chaque fois qu'il touche la cible. Alexandre relève les points mais, peu concentré sur cette tâche inintéressante, il se trompe une fois sur 2 en moyenne et augmente le total de 1. On note X le nombre de points que retourne Alexandre. Exprimer X comme la somme de deux variables aléatoires de loi classique et en déduire $\mathbb{E}(X)$.
   5.5 Soit (X,Y) dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant

$Y \backslash X$	0	1	2
-1	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

   Déterminer la loi et l'espérance de $Z = XY$.
   5.6 n candidats passent un examen. Chaque candidat à la même probabilité $p \in]0;1[$ de réussir. S'il échoue il a la possibilité de passer un rattrapage au cours duquel il a la même probabilité p de réussir. Quelle est la loi de du nombre de lauréats ?