Correction de l'interrogation 17 d'entrainement
Couples de variables aléatoires

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et (X, Y) un couple de variables aléatoires défini sur Ω. Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$. On appelle loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ la probabilité suivante :

$$\mathbb{P}_{(Y=y)} : \quad X(\Omega) \to [0;1]$$
$$x \mapsto \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))}{\mathbb{P}(Y = y)}.$$

1.2 Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. On appelle espérance de X le nombre défini par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

On définit la variance de X le nombre défini par

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 \text{ par la formule de Koenig-Huygens.}$$

Si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$, alors, on définit la fonction génératrice de X par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{i=1}^{n} t^{x_i} \mathbb{P}(X = x_i).$$

1.3 Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y), \qquad \mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)/$$

1.4 Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω. Notons $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Soit $\varphi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$. Alors,

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \mathbb{P}(X = x_i).$$

1.5 Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

1.6 Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $p \in [0;1]$ et $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(m, p)$ deux variables aléatoires définies sur Ω. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$X + Y \sim \mathscr{B}(n + m, p).$$

1.7 Car elle/il a l'espérance de ne pas rester marginal dans son couple tout en gardant son indépendance. Fort de son expérience, il/elle sait que le succès est probablement conditionné au fait de réaliser uniformément la loi du ou de la conjointe Bienaymé y compris lorsqu'elle/il transfert son humeur variable...

Révisions

1.9 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{F}(E, F)$ une fonction de E dans F. On dit que f est linéaire si et seulement si

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in E^2, \qquad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

1.10 Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors

- le noyau de f est défini par
$$\mathrm{Ker}\,(f) = \{\, x \in E \mid f(x) = 0_F \,\}.$$
- l'image de f est définie par
$$\mathrm{Im}\,(f) = \{\, y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x) \,\}.$$

1.11 Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E. La projection sur F parallèlement à G est l'application

$$p : \begin{array}{rcl} E = F \oplus G & \to & E \\ x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 \end{array}$$

Dans ce cas $F = \mathrm{Im}\,(p) = \{\, x \in E \mid p(x) = x \,\} = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}\,(p)$.
De plus, pour $p \in \mathscr{L}(E)$, on a
$$p \text{ projection} \qquad \Leftrightarrow \qquad p \circ p = p.$$

1.12 Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E. La symétrie sur F parallèlement à G est l'application

$$s : \begin{array}{rcl} E = F \oplus G & \to & E \\ x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 - x_2 \end{array}$$

Dans ce cas $F = \{\, x \in E \mid s(x) = x \,\} = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \{\, x \in E \mid s(x) = -x \,\} = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$.
De plus, pour $s \in \mathscr{L}(E)$, on a
$$s \text{ symétrie} \qquad \Leftrightarrow \qquad s \circ s = \mathrm{Id}_E.$$

1.13 Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors

- f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$.
- f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) = F$.

1.14 Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{F}(E, F)$.

- On dit que f est un isomorphisme si et seulement si f est linéaire et bijective.
- On dit que f est un endomorphisme si et seulement si f est linéaire et $E = F$.
- On dit que f est un automorphisme si et seulement si f est linéaire, bijective et $E = F$.

1.15 Soit E un espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E est

- stable par composition : pour tout $(f, g) \in \mathrm{GL}\,(E)^2$, on a $f \circ g \in \mathrm{GL}\,(E)$.
- stable par inverse : pour tout $f \in \mathrm{GL}\,(E)$, on a $f^{-1} \in \mathrm{GL}\,(E)$.

2. **Reconnaitre une loi usuelle.**

2.1 On suppose chaque tirage indépendant. Le fait de placer un objet en case 1 sera considéré comme un succès et son contraire un échec. La probabilité d'obtenir un succès est de $p = 1/3$. On répète cette expérience de Bernoulli $n = 20$ fois. Le nombre total de succès est donc une variable aléatoire de loi binomiale de paramètre $n = 20$ et $p = 1/3$. Par conséquent,

$$\boxed{X \sim \mathscr{B}\left(20, \frac{1}{3}\right), \qquad X(\Omega) = [\![0; 20]\!], \qquad \mathbb{E}(X) = np = \frac{20}{3}, \qquad \mathbb{V}(X) = np(1-p) = \frac{40}{9}.}$$

Enfin,

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 0) = \binom{20}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{20} = \left(\frac{2}{3}\right)^{20}.}$$

2.2 Attention il ne s'agit pas d'une loi binomiale car l'obtention d'un succès (avoir l'as de cœur) au retournement numéro i n'est pas indépendant de l'obtention d'un succès au numéro j (il n'y a pas remise). Cependant les cartes étant mélangées, la position de l'as de cœur, et donc le nombre de cartes retournées, est équiprobable sur les 32 positions. Donc X est une variable aléatoire uniforme sur $[\![1; 32]\!]$:

$$\boxed{X \sim \mathscr{U}([\![1; 32]\!]), \qquad X(\Omega) = [\![1; 32]\!], \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{33}{2}}$$

et

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{(n-1)(n+1)}{12} = \frac{31 \times 33}{12} = \frac{31 \times 11}{4} = \frac{341}{4}.}$$

Enfin,

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 10) = \frac{1}{32}.}$$

2.3 Un lama n'ayant aucune bosse, un dromadaire en ayant une et un chameau en ayant deux, on en déduit que $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$. De plus, on suppose le choix de l'animal uniforme parmi tous les animaux présents : donc

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2).$$

Ainsi, $X \sim \mathscr{U}([\![0; 2]\!])$ et donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{2} k\mathbb{P}(X = k) = 0 + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1.$$

De plus, par la formule de Koenig-Huygens puis le théorème de transfert,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=0}^{2} k^2\mathbb{P}(X = k) - 1^2 = 0 + 1 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}.$$

Enfin,

$$\mathbb{P}(X \leqslant 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{X \sim \mathscr{U}([\![0; 2]\!]), \qquad \mathbb{E}(X) = 1, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{2}{3}, \qquad \mathbb{P}(X \leqslant 1) = \frac{2}{3}.}$$

2.4 On suppose les tirages indépendants. Le succès « obtenir un roi » a un probabilité de $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. On répète $n = 5$ fois *la même* expérience car le tirage est *avec remise*. Donc

$$\boxed{X \sim \mathscr{B}\left(5, \frac{1}{13}\right), \qquad X(\Omega) = [\![0; 5]\!], \qquad \mathbb{E}(X) = np = \frac{5}{13}, \qquad \mathbb{V}(X) = np(1-p) = \frac{5 \times 12}{13^2} = \frac{60}{169}.}$$

Enfin,

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geqslant 3) = \sum_{k=3}^{5} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=3}^{5} \binom{5}{k}\left(\frac{1}{13}\right)^k\left(\frac{12}{13}\right)^{5-k} = \frac{1}{13^5}\sum_{k=3}^{5}\binom{5}{k}12^{5-k}.}$$

2.5 Pour chaque étudiant, l'expérience revient à choisir aléatoirement s'il est gaucher ou droitier. On sait qu'en moyenne 1 étudiant sur 9 est gaucher. La probabilité d'obtenir un succès i.e. d'être gaucher est de $\frac{1}{9}$. On suppose que ce caractère est indépendant d'un étudiant à l'autre. On effectue ce tirage 6 fois pour les 6 germanistes. On obtient alors une loi binomiale de paramètre $n = 6$ et $p = \frac{1}{9}$:

$$\boxed{X \sim \mathscr{B}\left(6, \frac{1}{9}\right), \qquad X(\Omega) = [\![0;6]\!], \qquad \mathbb{E}(X) = np = \frac{2}{3}, \qquad \mathbb{V}(X) = np(1-p) = \frac{6\times 8}{81} = \frac{16}{27}.}$$

Enfin,

$$\boxed{\mathbb{P}(X=6) = \binom{6}{6}\left(\frac{1}{9}\right)^6\left(1-\frac{1}{9}\right)^0 = \frac{1}{9^6}.}$$

3. **Manipuler un couple de variables aléatoires.**

3.1 Soient X_1 le résultat du premier tirage et X_2 le résultat du second tirage. Alors, $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{-1;1\}$ et on a $X = X_1 + X_2$ et $Y = X_1X_2$. Par suite, $X(\Omega) = \{-2;0;2\}$ et $Y(\Omega) = \{-1;1\}$. On note que

$$\begin{aligned}(X=-2) &= (X_1=-1)\cap(X_2=-1)\\ (X=0) &= [(X_1=-1)\cap(X_2=1)]\cup[(X_1=1)\cap(X_2=-1)]\\ (X=2) &= (X_1=1)\cap(X_2=1)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(Y=-1) &= [(X_1=-1)\cap(X_2=1)]\cup[(X_1=1)\cap(X_2=-1)]\\ (Y=1) &= [(X_1=-1)\cap(X_2=-1)]\cup[(X_1=1)\cap(X_2=1)].\end{aligned}$$

De plus, par hypothèse, X_1 et X_2 sont indépendantes. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X,Y)=(-2,-1)) &= \mathbb{P}(\emptyset) = 0\\ \mathbb{P}((X,Y)=(-2,1)) &= \mathbb{P}((X_1=-1)\cap(X_2=-1)) = \mathbb{P}(X_1=-1)\,\mathbb{P}(X_2=-1) = \frac{1}{4}\\ \mathbb{P}((X,Y)=(0,-1)) &= \mathbb{P}([(X_1=-1)\cap(X_2=1)]\sqcup[(X_1=1)\cap(X_2=-1)])\\ &= \mathbb{P}(X_1=-1)\,\mathbb{P}(X_2=1)+\mathbb{P}(X_1=1)\,\mathbb{P}(X_2=-1) \qquad \textit{car l'union est disjointe}\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\\ \mathbb{P}((X,Y)=(0,1)) &= \mathbb{P}(\emptyset) = 0\\ \mathbb{P}((X,Y)=(2,-1)) &= \mathbb{P}(\emptyset) = 0\\ \mathbb{P}((X,Y)=(2,1)) &= \mathbb{P}((X_1=1)\cap(X_2=1)) = \mathbb{P}(X_1=1)\,\mathbb{P}(X_2=1) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

D'où,

$Y\backslash X$	-2	0	2
-1	0	$\frac{1}{2}$	0
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

On remarque en particulier que $\mathbb{P}((X=-2)\cap(Y=-1)) = 0$. Or, toujours par indépendance de X_1 et X_2,

$$\mathbb{P}(X=-2) = \mathbb{P}((X_1=-1)\cap(X_2=-1)) = \mathbb{P}(X_1=-1)\,\mathbb{P}(X_2=-1) = \frac{1}{4}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=-1) &= \mathbb{P}([(X_1=-1)\cap(X_2=1)]\sqcup[(X_1=1)\cap(X_2=-1)])\\ &= \mathbb{P}((X_1=-1)\cap(X_2=1))+\mathbb{P}((X_1=1)\cap(X_2=-1)) \qquad \textit{car l'union est disjointe}\\ &= \mathbb{P}(X_1=-1)\,\mathbb{P}(X_2=1)+\mathbb{P}(X_1=1)\,\mathbb{P}(X_2=-1) \qquad \textit{par indépendance}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Nous aurions aussi pu utiliser la loi conjointe et sommer sur les lignes (pour Y) et les colonnes (pour X). Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y=-1)\,\mathbb{P}(X=-2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}\neq 0=\mathbb{P}((X=-2)\cap(Y=-1)).$$

Conclusion, $\boxed{\text{les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

3.2 Soit $i\in[\![1;n]\!]$. La famille $((Y=j))_{1\leqslant j\leqslant n}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X=i)=\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j))=\sum_{j=1}^{n}\frac{a}{2^{i+j}}=\frac{a}{2^i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^j.$$

On reconnait une somme géométrique de raison $1/2\neq 1$, donc,

$$\mathbb{P}(X=i)=\frac{a}{2^i}\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall i\in[\![1;n]\!],\quad \mathbb{P}(X=i)=\frac{a}{2^i}\left(1-\frac{1}{2^n}\right).}$$

De la même façon, par symétrie des hypothèses sur X et Y, on obtient également

$$\boxed{\forall j\in[\![1;n]\!],\quad \mathbb{P}(X=j)=\frac{a}{2^j}\left(1-\frac{1}{2^n}\right).}$$

NB : a est la constante de normalisation pour faire en sorte que $\mathbb{P}$ soit bien une probabilité : il faut que

$$\begin{aligned}1=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X=i)&=a\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\sum_{i=1} n\frac{1}{2^i}\\&=a\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{2}\sum_{i=0} n-1\frac{1}{2^i}\\&=a\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\\&=a\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$a=\frac{1}{(1-\frac{1}{2^n})^2}.$$

Avec cette donnée, on peut se demander si X et Y sont indépendants ou non. Pour tout $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$, on a

$$\mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j)=\frac{a}{2^i}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\times\frac{a}{2^j}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\frac{a^2}{2^{i+j}}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2=\frac{a}{2^{i+j}}=\mathbb{P}((X,Y)=(i,j)).$$

Donc X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes.

3.3 Par définition, on a $X(\Omega)=[\![1;3]\!]$ et $Y(\Omega)=[\![0;3]\!]$. De plus par indépendance, pour tout $(i,j)\in[\![1;3]\!]\times[\![0;3]\!]$, on a

$$\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j))=\mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j)=\frac{1}{3}\binom{3}{j}p^j(1-p)^{3-j}.$$

On obtient alors le tableau suivant :

$X\backslash Y$	0	1	2	3
1	$(1-p)^3/3$	$p(1-p)^2$	$p^2(1-p)$	$p^3/3$
2	$(1-p)^3/3$	$p(1-p)^2$	$p^2(1-p)$	$p^3/3$
3	$(1-p)^3/3$	$p(1-p)^2$	$p^2(1-p)$	$p^3/3$

3.4 On a $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \varepsilon(\Omega) = \{0;1\}$. Donc on en déduit que $Y(\Omega) = \{0;1;2\}$. On sait que $(\varepsilon = 0)$ et $(\varepsilon = 1)$ forment un système complet d'évènements (incompatibles). Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(Y=0 \mid \varepsilon=0)\,\mathbb{P}(\varepsilon=0) + \mathbb{P}(Y=0 \mid \varepsilon=1)\,\mathbb{P}(\varepsilon=1).$$

Puisque ε est une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, $\mathbb{P}(\varepsilon=0) = \mathbb{P}(\varepsilon=1) = \frac{1}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=0) &= \mathbb{P}(0\times X_1 + (1-0)X_2 = 0 \mid \varepsilon=0)\frac{1}{2} + \mathbb{P}(1\times X_1 + (1-1)X_2 = 0 \mid \varepsilon=1)\frac{1}{2}\\ &= \frac{\mathbb{P}(X_2=0 \mid \varepsilon=0) + \mathbb{P}(X_1=0 \mid \varepsilon=1)}{2}.\end{aligned}$$

Or par hypothèse, ε est indépendant de X_1 et de X_2. Donc

$$\mathbb{P}(Y=0) = \frac{\mathbb{P}(X_2=0)+\mathbb{P}(X_1=0)}{2} = \frac{1-p_2+1-p_1}{2} = 1 - \frac{p_1+p_2}{2}.$$

Par les mêmes arguments, en commençant par la formule des probabilités totales, on obtient également,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=1) &= \mathbb{P}(Y=1 \mid \varepsilon=0)\,\mathbb{P}(\varepsilon=0) + \mathbb{P}(Y=1 \mid \varepsilon=1)\,\mathbb{P}(\varepsilon=1)\\ &= \mathbb{P}(X_2=1 \mid \varepsilon=0)\frac{1}{2} + \mathbb{P}(X_1=1 \mid \varepsilon=1)\frac{1}{2} && \text{car } \varepsilon \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \mathbb{P}(X_2=1)\frac{1}{2} + \mathbb{P}(X_1=1)\frac{1}{2} && \text{car } \varepsilon \text{ est indépendante de } X_1 \text{ et } X_2\\ &= \frac{p_1+p_2}{2} && \text{car } X_1 \sim \mathscr{B}(p_1) \text{ et } X_2 \sim \mathscr{B}(p_2).\end{aligned}$$

Enfin, $((Y=i))_{0\leqslant i\leqslant 2}$ forme un système complet d'évènements donc

$$\mathbb{P}(Y=2) = 1 - \mathbb{P}(Y=1) - \mathbb{P}(Y=0) = 1 - 1 + \frac{p_1+p_2}{2} - \frac{p_1+p_2}{2} = 0.$$

Donc on peut réduire l'univers image de Y à $Y(\Omega) = \{0;1\}$ et on en conclut que

$$\boxed{Y \sim \mathscr{B}\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right).}$$

3.5 On note que $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et $\varepsilon(\Omega) = \{0;1\}$. Donc $Y(\Omega) = [\![-n;n]\!]$. Soit $k \in [\![-n;n]\!]$. On sait que $(\varepsilon=0)$ et $(\varepsilon=1)$ forment un système complet d'évènements (incompatibles). Donc par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=k) &= \mathbb{P}(Y=k \mid \varepsilon=0)\,\mathbb{P}(\varepsilon=0) + \mathbb{P}(Y=k \mid \varepsilon=1)\,\mathbb{P}(\varepsilon=1)\\ &= \mathbb{P}(X=k \mid \varepsilon=0)\frac{1}{2} + \mathbb{P}(-X=k \mid \varepsilon=1)\frac{1}{2} && \text{car } \varepsilon \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\mathbb{P}(X=k)+\mathbb{P}(X=-k)}{2} && \text{car } \varepsilon \text{ et } X \text{ sont indépendantes.}\end{aligned}$$

Premier cas, $k \in [\![-n;-1]\!]$, alors, puisque $X\mathscr{U}([\![0;n]\!])$

$$\mathbb{P}(Y=k) = \frac{0+\frac{1}{n+1}}{2} = \frac{1}{2(n+1)}.$$

De même si $k \in [\![1;n]\!]$, alors $\mathbb{P}(Y=k) = \frac{1}{2(n+1)}$. Enfin, si $k=0$,

$$\mathbb{P}(Y=0) = \frac{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}}{2} = \frac{1}{n+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in [\![-n;-1]\!] \cup [\![1;n]\!], \qquad \mathbb{P}(Y=k) = \frac{1}{2(n+1)} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{n+1}.}$$

4. **Espérance et variance.**

4.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$. On a par définition,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

De plus, par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Donc par la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{3(n+1)^2}{12} \\
&= \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12} \\
&= \frac{(n+1)(n-1)}{12}.
\end{aligned}$$

Donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \frac{n+1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{(n+1)(n-1)}{12\,\varepsilon^2}.$$

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{(n+1)(n-1)}{12} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left(\left|X - \frac{n+1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{(n+1)(n-1)}{12\,\varepsilon^2}.}$$

4.2 Puisque $X_n \sim \mathscr{B}(n, p)$, on sait que $\mathbb{E}(X_n) = np$ et $\mathbb{V}(X_n) = np(1-p)$. Posons $Y = \frac{X_n}{n}$. Par linéarité de l'espérance et propriété de la variance, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{X_n}{n}\right) &= \frac{\mathbb{E}(X_n)}{n} = \frac{np}{n} = p \\
\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}\left(\frac{X_n}{n}\right) &= \frac{\mathbb{V}(X_n)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}.
\end{aligned}$$

Ainsi, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$0 \leqslant \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Y)}{\varepsilon^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n}.$$

Donc par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0.}$$

L'inégalité précédente est un grand classique de la statistique et permet de construire un intervalle de confiance autour du paramètre p. La convergence obtenue est la démonstration de la loi faible des grands nombres dans le cas binomiale et affirme que la moyenne empirique/mesurée $\frac{X_n}{n}$ converge en probabilité vers la moyenne théorique p.

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0$.

4.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{x \in X_n(\Omega)} \cos\left(\frac{x}{n}\right) \mathbb{P}(X_n = x) = \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n}\right),$$

car la probabilité est uniforme. Ne serait-ce pas notre cher Riemann qui vient se joindre à nous ? La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est continue sur $[0; 1]$, on reconnait donc bien une somme de Riemann entre $[0; 1]$ d'ordre n :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(0 + k\frac{1-0}{n}\right).$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Y_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x = [\sin(x)]_{x=0}^{x=1} = \sin(1).}$$

4.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(X_n \leqslant p) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n} = \frac{p}{n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant p) = \lim_{n \to +\infty} \frac{p}{n} = 0.}$$

Plus le paramètre n est grand pour une variable aléatoire uniforme $\mathscr{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$, plus la variable aléatoire doit « s'étaler » sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ plus la probabilité d'être entre $\llbracket 1; p \rrbracket$ est faible.

4.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note que $X_n(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$. Par définition de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k a_n \,\mathrm{e}^{-\sqrt{k}} = a_n \sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{e}^{-\sqrt{k}}.$$

Puisque $X_n(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket \subseteq \mathbb{R}_+^*$, on a $|X| = X$ et donc par l'inégalité de Markov, on a

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(X_n > \frac{n}{10}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\frac{n}{10}} = \frac{10a_n}{n} \sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{e}^{-\sqrt{k}}.$$

Par croissance comparée, on sait que $k\,\mathrm{e}^{-\sqrt{k}} \underset{k \to +\infty}{\ll} \frac{1}{k^2}$. Donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $k \geqslant k_0$,

$$0 \leqslant k\,\mathrm{e}^{-\sqrt{k}} \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

Or $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison, $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k\,\mathrm{e}^{-\sqrt{k}}$ converge. Notons S sa somme totale. Ainsi,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \lim_{n \to +\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{e}^{-\sqrt{k}} = aS \in \mathbb{R}.$$

Donc,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{10a_n}{n} \sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{e}^{-\sqrt{k}} = 0.$$

Conclusion, par le théorème de comparaison,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(X_n > \frac{n}{10}\right) = 0.}$$

Quelle est donc cette mystérieuse suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$? Pour que la variable aléatoire X_n soit bien définie, il faut que $((X_n = k))_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ forme un système complet d'évènements (incompatibles). L'incompatibilité est toujours garantie mais il faut vérifier que

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} a_n \,\mathrm{e}^{-\sqrt{k}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_n \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\sqrt{k}} = 1.$$

Attention, à cause de la racine carrée, la somme n'est pas une somme géométrique. Cependant, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ *étant à terme strictement positif est une suite strictement croissante et donc*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\sqrt{k}} \geqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{1}} > 0.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\sqrt{k}}} > 0.$$

La constante a_n *est la constante de renormalisation pour que* X_n *soit bien une variable aléatoire. On note que la série* $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathrm{e}^{-\sqrt{k}}$ *est une série convergente (utilisez le théorème de comparaison avec* $\frac{1}{k^2}$ *comme ci-dessus). Sa somme totale existe donc et*

$$a = \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{k}}}.$$

4.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$. Par le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\left(\frac{n}{X_n^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2} \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, $Y_n(\omega) = \frac{n}{X_n^2(\omega)} = \geqslant 0$, donc $|Y(\omega)| = Y(\omega)$. Ainsi par l'inégalité de Markov, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$0 \leqslant \mathbb{P}(Y_n > \varepsilon\, n) = \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon\, n) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{\varepsilon\, n} = \frac{1}{\varepsilon\, n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Notons S sa somme totale, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon\, n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 0 \times \varepsilon\, S = 0.$$

Conclusion, par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n > \varepsilon\, n) = 0.}$$

5. **En vrac.**

5.1 On note A_i l'évènement « obtenir pile au i-ième lancer ». On remarque alors que

$$(X = 0) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}.$$

Les lancers sont indépendants, donc les A_i et donc les $\overline{A_i}$ sont mutuellement indépendants. Donc,

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right) = (1-p) \times \cdots \times (1-p) = (1-p)^n.$$

De même, on a pour tout $k \in [\![2; n]\!]$,

$$(X = k) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(\overline{A_{k-1}}\right) \times \mathbb{P}(A_k) = (1-p)^{k-1} p,$$

ce qui est encore vrai si $k = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 0) = (1-p)^n \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1; n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p.}$$

NB : on vérifie facilement que $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$*. Cette loi est le pendant fini de la loi géométrique qui retourne le rang du premier pile mais sans jamais arrêter le jeu si l'on n'obtient que des faces : autrement dit elle est définie sur* $\mathbb{N}^*$ *tout entier par* $\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{k-1} p$*. On vérifier alors facilement que* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (1-p)^{n-1} p$ *est une série convergente dont la somme totale vaut bien* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (1-p)^{n-1} p = 1$ *pour* $p \in]0; 1[$*.*

5.2 On note X_n le facteur multiplicatif le jour n : $X = \alpha$ avec une probabilité de p et $X = \beta$ avec une probabilité $1-p$. Alors, on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} = X_n S_n.$$

On suppose X_n indépendante de S_n. Alors,

$$\mathbb{E}\left(S_{n+1}\right) = \mathbb{E}\left(X_n S_n\right) = \mathbb{E}\left(X_n\right)\mathbb{E}\left(S_n\right).$$

Or

$$\mathbb{E}\left(X_n\right) = \alpha\mathbb{P}\left(X_n = \alpha\right) + \beta\mathbb{P}\left(X_n = \beta\right) = \alpha p + \beta\left(1-p\right).$$

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \mathbb{E}\left(S_n\right)$ et $\lambda = \alpha p + \beta\left(1-p\right)$. Alors, par ce qui précède,

$$s_{n+1} = \lambda\, s_n.$$

Autrement dit, la suite $\left(s_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison λ. Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{E}\left(S_n\right) = s_n = \lambda^n\, s_0 = \left(\alpha p + \beta\left(1-p\right)\right)^n.}$$

Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors en posant $T_n = \ln\left(S_n\right)$ et $Y_n = \ln\left(X_n\right)$, on observe que $T_{n+1} = T_n + Y_n = T_0 + \sum_{k=0}^{n} Y_k$, et on obtient ce que l'on appelle une marche aléatoire dont les Y_k constituent les accroissements successifs.

5.3 Soit X_1 le nombre de points obtenu par Alexandre. Par hypothèse les lancers sont identiques, indépendants, avec les issues 0 et 1 seulement à chaque lancer. Donc X_1 est une loi binomiale de paramètre n (le nombre de lancers) et p (la probabilité de toucher la cible et donc d'avoir un point) :

$$X_1 \sim \mathscr{B}\left(n, p\right).$$

Posons X_2 la variable aléatoire valant 0 si Maxence respecte le score et 1 si jamais il l'augmente de 1. On a alors X_2 qui est une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$: $X_2 \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Avec ses notations, le score total est

$$X = X_1 + X_2.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X\right) = \mathbb{E}\left(X_1\right) + \mathbb{E}\left(X_2\right) = np + \frac{1}{2}.}$$

5.4 On a $X\left(\Omega\right) = [\![0;2]\!]$ et $Y\left(\Omega\right) = \{-1;1\}$. Donc l'univers image de Z est $Z\left(\Omega\right) = \{-2;-1;0;1;2\}$. La famille $\left(\left(X = i\right) \cap \left(Y = j\right)\right)_{(i,j)\in[\![0;2]\!]\times\{-1;1\}}$ forme un système complet d'évènements (incompatibles) non négligeables (car aucune case du tableau n'est nulle). Donc par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Z = -2\right) &= \sum_{i\in[\![0;2]\!]}\sum_{j\in\{-1;1\}} \mathbb{P}\left(ij = -2 \mid \left(X = i\right) \cap \left(Y = j\right)\right)\mathbb{P}\left(\left(X = i\right) \cap \left(Y = j\right)\right)\\ &= 0 + \mathbb{P}\left(\left(X = 2\right) \cap \left(Y = -1\right)\right) = \frac{2}{16}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Z = -1\right) &= \mathbb{P}\left(\left(X = 1\right) \cap \left(Y = -1\right)\right) = \frac{2}{16}\\ \mathbb{P}\left(Z = 0\right) &= \mathbb{P}\left(\left(X = 0\right) \cap \left(Y = -1\right)\right) + \mathbb{P}\left(\left(X = 0\right) \cap \left(Y = 1\right)\right) = \frac{4}{16} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}\\ \mathbb{P}\left(Z = 1\right) &= \mathbb{P}\left(\left(X = 1\right) \cap \left(Y = 1\right)\right) = \frac{4}{16}\\ \mathbb{P}\left(Z = 2\right) &= \mathbb{P}\left(\left(X = 2\right) \cap \left(Y = 1\right)\right) = \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

Ainsi,

z	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}\left(Z = z\right)$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

NB : pensez bien à vérifier que la somme totale fait 1.
De plus,

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=-2}^{2} i\mathbb{P}(Z=i) = -2 \times \frac{2}{16} + (-1) \times \frac{2}{16} + 0 \times \frac{7}{16} + 1 \times \frac{4}{16} + 2 \times \frac{1}{16} = 0.$$

NB : si la loi de Z ne nous avait pas été demandée, nous aurions malgré tout pu obtenir l'espérance de Z par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \sum_{i\in[\![0;2]\!]} \sum_{j\in\{-1;1\}} ij\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) \\ &= 0 \times \frac{4}{16} + 0 \times \frac{3}{16} + (-1) \times \frac{2}{16} + 1 \times \frac{2}{16} + (-1) \times \frac{2}{16} + 2 \times \frac{1}{16} \\ &= 0.\end{aligned}$$

On pouvait aussi se demander si ces deux variables sont non-corrélées i.e. a-t-on $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. On obtient facilement les lois marginales de X et Y :

$Y\backslash X$	0	1	2	$\mathbb{P}(Y=j)$
-1	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(X=i)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{3}{16}$	1

Alors on observe bien que $\mathbb{E}(Y) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$ (on dit que Y est centrée). Donc

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(Z) = 0 = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y).$$

Les variables X et Y sont non-corrélées : $Cov(X,Y) = 0$ et pourtant X et Y ne sont pas indépendantes ! ! En effet :

$$\mathbb{P}((X=0)\cap(Y=-1)) = \frac{4}{16} \neq \frac{7}{32} = \mathbb{P}(X=0) \times \mathbb{P}(Y=-1).$$

5.5 Puisque chaque candidat est identique et que l'on suppose la réussite de l'un indépendant de la réussite de l'autre, on en déduit que le nombre de lauréats suit une loi binomiale de paramètre n et q qu'il ne faut calculer. Notons A_1 l'évènement « le candidat réussi lors de l'examen initial » et A_2 l'évènement « le candidat réussi au rattrapage ». On cherche $q = \mathbb{P}\left(A_1 \sqcup \left(\overline{A_1} \cap A_2\right)\right)$. Puisque l'union est disjointe (A_1 et $\overline{A_1}$ sont incompatibles),

$$q = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap A_2\right).$$

Comme $p \neq 1$, $\overline{A_1}$ est non négligeable : $\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right) = 1 - p \neq 0$. Donc

$$q = p + \mathbb{P}\left(A_2 \mid \overline{A_1}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right) = p + p \times (1-p) = p(2-p).$$

Conclusion,

$$\boxed{X \sim \mathscr{B}(n, p(2-p)).}$$