Réponses de l'interrogation 18
Séries numériques

1. (a) Enoncer le théorème sur les séries de Riemann.

   Solution. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Une série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si son exposant vérifie $\alpha > 1$.

   (b) Enoncer le théorème de comparaison.

   Solution. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. On suppose que
$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$
   Dans ce cas, si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

   Par contraposée, si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.

   (c) Enoncer l'identité des accroissements finis.

   Solution. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe $c \in\ ]a;b[$ tel que
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

2. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(n^3+1\right)^{1/3} - \left(n^2+1\right)^{1/2}$.

   Solution. Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$. Conclusion,
$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(n^3+1\right)^{1/3} - \left(n^2+1\right)^{1/2} \text{ diverge.}}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{(n+3)!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$ Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.

   Solution. D'où
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{(i-1)n\theta}$.

   Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{(i-1)n\theta} = \mathrm{e}^{-n\theta}\,\mathrm{e}^{in\theta}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\mathrm{e}^{(i-1)n\theta}\right| = \mathrm{e}^{-n\theta}$. Or la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{-n\theta}$ converge en tant que série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-\theta} \in [0;1[$ car $\theta > 0$. Donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\mathrm{e}^{(i-1)n\theta}\right|$ converge i.e. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{(i-1)n\theta}$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,
$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{(i-1)n\theta} \text{ converge.}}$$

5. Déterminer un équivalent des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} \frac{\ln^2(n)}{n}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geqslant e^2+1$.

Solution. Soit $f : t \mapsto \frac{\ln^2(t)}{t}$. La fonction f est décroissante sur $\left[e^2; +\infty\right[$. Ainsi,

$$\int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{N} f(k) \leqslant \int_{n_0-1}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\frac{\ln^3(N+1)}{3} - \frac{\ln^3(n_0)}{3} \leqslant \sum_{k=n_0}^{N} \frac{\ln^2(k)}{k} \leqslant \frac{\ln^3(N)}{3} - \frac{\ln^3(n_0-1)}{3}.$$

Conclusion, par le théorème d'encadrement des équivalents,

$$\boxed{\sum_{k=n_0}^{N} \frac{\ln^2(k)}{k} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^3(N)}{3}.}$$