Déterminants

EXERCICES

Exercice 1

1) Dans le plan rapporté à une base orthonormée directe, on considère les points $A(2,1), B(-1,2)$ et $C(1,4)$. Calculer l'aire du triangle ABC.

2) Dans l'espace rapporté à une base orthonormée directe, on considère les points $A(2,1,1), B(-1,2,0)$, $C(1,4,-1)$ et $D(3,4,2)$. Calculer le volume du parallélépipède construit à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Exercice 2

Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

(a) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ (a_1) & & & a_1 \end{vmatrix}$$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$$

où pour tout $1 \leq k \leq n$, on a : $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} i$

Exercice 5

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $A^\top \times A$. En déduire $det(A)$.
2. Soit $(a, b, c, d, a', b', c', d') \in \mathbb{Z}^8$. Montrer qu'il existe $(a'', b'', c'', d'') \in \mathbb{Z}^4$ tels que :

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) = a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2$$

Exercice 6

Calculer

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 9

On considère les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de $m \in \mathbb{R}$ la famille (e_1, e_2, e_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 10

Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = XP'(X+2) + \widetilde{P}(1)(X^3 - 1)$.

1. Montrer que f est bien définie, et linéaire.
2. Calculer $\det(f)$. f est-elle un automorphisme ?

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} 7-x & 2 & -2 \\ 2 & 4-x & -1 \\ -2 & -1 & 4-x \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 12

(Déterminants de Vandermonde). Soit $n \geq 2$. Pour tout n-uplet $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. Calculer $V_3(a, b, c)$, pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, puis $V_4(a, b, c, d)$, pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$.
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 2, V_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$. (Aide : on pourra introduire $P = \prod_{1 \leq j \leq n} (X - a_j) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$.)