Espaces préhilbertiens

EXERCICES

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $\phi : ((x,y),(x',y')) \mapsto xx' + \frac{1}{2}(xy' + yx') + yy'$.

Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.

Exercice 2

Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}) \geq n^2$.

Etudier le cas d'égalité.

Exercice 3

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge.

1) Soit $(u,v) \in E^2$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n v_n$ converge.

2) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times)$.

3) Montrer que $\phi : (u,v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 4

1) Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} sin(nx)sin(px)\,\mathrm{d}x$.

2) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

Montrer que $\phi : (f,g) \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur E.

3) En déduire que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille libre de E, où $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}*, s_n(x) = sin(nx)$.

Exercice 5

Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $3x - y + 2z = 0$.

Une base de $\mathcal{P}$ est (u,v) avec $u = (1,3,0)$ et $v = (0,2,1)$.

Donner une base orthonormale de $\mathcal{P}$.

Exercice 6

Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit $u = (a,b,c)$ un vecteur unitaire. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la projection orthogonale sur le vecteur u.

Exercice 7

Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x + y - z = 0$.

Exercice 8

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de $(P,Q) \mapsto P \mid Q = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $(. \mid .)$ est un produit scalaire sur E.

2) Déterminer une base orthonormale de $(E, |)$.

3) Déterminer $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])$.

Exercice 9

Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit $v = (-3, 5, 8)$ et $w = (1, -4, 9)$.

1) Déterminer le projeté orthogonal de v sur le vecteur w.

2) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P} = Vect(v, w)$ puis en déduire un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Exercice 10

Soit $E = \mathbb{R}^2$. On considère $\phi : E \times E \to \mathbb{R}, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2$.

1) Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.

2) Déterminer une base orthonormale de (E, ϕ).