Séries numériques

EXERCICES

Exercice 1

Déterminer la nature et, le cas échéant, calculer la somme de la série de terme général :

$u_n = \dfrac{\ln(\frac{n+1}{n})}{\ln(n)\ln(n+1)}$, pour n entier naturel non nul et différent de 1.

Exercice 2

Calculer la somme partielle au rang n de la série de terme général :

$u_n = \dfrac{19}{4}\dfrac{1}{3^n} + \dfrac{6n-15}{4}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 3

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(4k-1)(\frac{1}{3})^k$.

Exercice 4

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^2-n+1}{n!}$.

Exercice 5

Calculer la somme de la série de terme général u_n définie par :

1) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ 2) $u_n = \ln(\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)})$

3) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

4) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}$ 5) $u_n = \dfrac{3^n}{n!}e^{-3}$

Exercice 6

Calculer la somme des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(\frac{1}{3})^n$, $\displaystyle\sum_{n\geq 3}\frac{2^n}{3^{n+2}}$.

Exercice 7

Déterminer la nature de la série de terme général u_n définie par :

1) $u_n = \dfrac{(\sqrt{n}+2)^3}{(n+1)^2(\sqrt{n}+1)}$ 2) $u_n = n(1-\cos(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}))$

3) $u_n = n^2e^{-n}$ 4) $u_n = \dfrac{\ln(2+\frac{1}{n})}{n}$

Exercice 8

Etudier la convergence absolue de :

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\sin(\frac{1}{n})}{\sqrt{n}+2\cos(n)}$ 2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\sin(\frac{1}{n})}{n}$

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{i\sin(n)}{n^2}$

Exercice 9

Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 0}(\frac{1+i}{2})^n$. En déduire la nature des séries $\sum_{n\geq 0}(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \sin(n\frac{\pi}{4})$ et $\sum_{n\geq 0}(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \cos(n\frac{\pi}{4})$

Exercice 10

1) Etudier la suite de terme général $u_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \ln(n)$, pour $n \geq 2$. (On pourra considérer la série de terme général $v_n = u_n - u_{n-1}$).

2) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln(n)}{n^2(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})}$.

Exercice 11

Soit la suite u définie par $u_n = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ peut se mettre sous la forme e^{v_n}.

2) Etudier la nature de la série de terme général $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$.

3) Montrer que la suite u converge vers un réel l strictement positif, puis en déduire un équivalent de $n!$ quand n tend vers $+\infty$.