Solution de l'exercice Automne 01
Bijection

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$f(x) \text{ existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - 4x + 5 \geqslant 0.$$
Soit Δ le discriminant de $X^2 - 4X + 5$. On a
$$\Delta = 16 - 20 = -4 < 0.$$
Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$. Conclusion,
$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

2. La fonction racine carrée n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$. Cependant pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a vu que $x^2 - 4x + 5 > 0$. Par conséquent la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Attention, la racine carrée posant un problème, il est insuffisant d'affirmer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)'}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$$
Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2 - 4x + 5} > 0$, on en déduit que pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f'(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x - 2 > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x > 2.$$
De même $f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 2$ et enfin $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2$. Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$, et strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$.
De plus,
$$f(2) = \sqrt{4 - 8 + 5} = 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 5} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 5} = +\infty.$$
Conclusion, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et par la question précédente strictement croissante sur $[2; +\infty[$. Par conséquent, la fonction g est continue et strictement croissante sur $[2; +\infty[$. Donc par le théorème de la bijection, on en déduit que
$$\boxed{g \text{ est une bijection de } [2; +\infty[\text{ dans } \left[g(2); \lim_{x \to +\infty} g(x)\right[= [1; +\infty[.}$$
De plus, toujours d'après le théorème de la bijection, sa réciproque, notée h est aussi continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

4. On sait que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[2;+\infty[$. Donc la fonction g est dérivable sur $[2;+\infty[$ et
$$\forall x \in [2;+\infty[\,, \qquad g'(x) = f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}.$$
Nous avons déjà établi que $\forall x > 2$, $f'(x) \neq 0$ et que $f'(2) = 0$. Par conséquent, g est dérivable sur $]2;+\infty[$ et pour tout $x > 2$, $g'(x) \neq 0$. Ainsi,
   - g est dérivable sur $]2;+\infty[$,
   - g est strictement croissante sur $]2;+\infty[$;
   - $\forall x \in]2;+\infty[$, $g'(x) \neq 0$.

   D'après le théorème de la dérivabilité de la fonction réciproque, on en déduit que
$$\boxed{h \text{ est dérivable sur } g\left(]2;+\infty[\right) =]1;+\infty[.}$$
On sait même que pour tout $x > 2$, $h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))}$.
Enfin, $f'(2) = 0$ i.e. le graphe de f admet une tangente horizontale en 2. Par symétrie par rapport à la droite $y = x$, on en déduit que
$$\boxed{\text{le graphe de } h \text{ admet une tangente verticale en 1.}}$$

5. Soit $(x,y) \in [2;+\infty[\times [1;+\infty[$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} y = g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \sqrt{x^2-4x+5} \\ &\Leftrightarrow \quad y^2 = x^2-4x+5 \qquad \textit{car } y \geqslant 1 \geqslant 0 \textit{ et } x^2-4x+5 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2-4x+5-y^2 = 0. \end{aligned}$$
Considérons y comme un paramètre fixé et posons Δ le discriminant de $X^2-4X+5-y^2$. On a
$$\Delta = 16 - 4\left(5-y^2\right) = 16 - 20 + 4y^2 = -4 + 4y^2 = 4\left(y^2-1\right).$$
Or $y \geqslant 1$ et donc $y^2 - 1 \geqslant 0$ i.e. $\Delta \geqslant 0$. Ainsi,
$$y = g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{4-\sqrt{4\left(y^2-1\right)}}{2} = 2 - \sqrt{y^2-1} \ \text{ OU } \ x = 2 + \sqrt{y^2-1}.$$
Or $x \geqslant 2$. Si $y = 1$, alors $y = g(x)$ admet une unique solution double : $x = 2$ et si $y > 1$, alors $2 - \sqrt{y^2-1} < 2 \leqslant x$ et donc $y = g(x)$ admet pour unique solution $x = 2 + \sqrt{y^2-1}$. Dans tous les cas,
$$y = g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2 + \sqrt{y^2-1}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall y \in [1;+\infty[\,, \qquad h(y) = 2 + \sqrt{y^2-1}.}$$