Exercice Automne 03 = Calcul algébrique

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto (1+2x)^n$.

1) Soit $f(x) = (1+2x)^n$, on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{F(x) = \dfrac{(1+2x)^{n+1}}{2(n+1)} \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}.}$ oui

De plus, par la formule du binome de Newton,

$$F(x) = \frac{1}{2(n+1)} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times (2x)^{k+1} = x \times \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times (2x)^k}{n+1} \quad ✓$$

Par ailleurs, on a :

Impossible car 1/(k+1) n'est pas entier.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$$

Posons $\tilde{k} = \dfrac{1}{k+1}$, si $k = n$, $\tilde{k} = \dfrac{1}{n+1}$

si $k = 0$, $\tilde{k} = \dfrac{1}{0+1} = 1$

$$= \sum_{\tilde{k}=1}^{\frac{1}{n+1}} \tilde{k} = \sum_{k=1}^{\frac{1}{n+1}} k \quad \text{car l'indice est muet}$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

Non.

Alors, $F(x) = x \times \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times (2x)^k = \boxed{x \times \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(2x)^k}{k+1} \binom{n}{k}.}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{2^k}{k+1} \binom{n}{k}$

$$= 1 \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(2 \times 1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = F(1) = \frac{(1+2\times 1)^{n+1}}{2(n+1)} = \frac{3^{n+1}}{2(n+1)}$$

$$\boxed{\text{Conclusion} = \forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{3^{n+1}}{2(n+1)}}$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum_{k=p+1}^{n+p} \dfrac{2^k}{k+1-p} \binom{n}{k-p}$

Posons $\tilde{k} = k - p$, oui !

si $k = p+1$, $\tilde{k} = 1$ ✓ et $k = \tilde{k} + p$ ✓

si $k = n+p$, $\tilde{k} = n$

oui

Donc, $T_n = \sum_{\tilde{k}=1}^{n} \dfrac{2^{\tilde{k}+p}}{\tilde{k}+1} \binom{n}{\tilde{k}} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2^{k+p}}{k+1} \binom{n}{k}$ car l'indice est muet ✓

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k+1} \times 2^p \binom{n}{k} \quad ✓$$

$$= 2^p \times \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k+1} \binom{n}{k} - \frac{2^0}{0+1} \binom{n}{0} \right) \quad \text{Bien}$$

$$= 2^p \times (S_n - 1) \quad ✓$$

$$\boxed{\text{Conclusion} = \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ T_n = 2^p \times \left(\frac{3^{n+1}}{2(n+1)} - 1 \right)}$$

Cohérent