Exercice Automne 05
Complexes

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z}{z-i} \end{cases}$.

1. Calculer $f^{\leftarrow}(\mathbb{R})$.
2. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des points du plan. Déterminer $\{M(z) \in \mathscr{P} \mid z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{R})\}$ par une autre méthode.

1) Sachant que l'on a :

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C} \quad f : z \mapsto \frac{z}{z-i}$

On cherche donc à savoir pour quelles valeurs de z, f nous renvoie dans $\mathbb{R}$.

Or, $\frac{z}{z-i}$ sera toujours complexe, car le -i au dénominateur impose la présence d'une partie imaginaire, peu importe la valeur de z. Faux : contre-exemple $z = 2i$
Même si l'on ne garde que la partie réelle de l'image obtenue, son antécédent sera bien un complexe, donc on obtient :

$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}}$$?

2) On cherche donc à déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, tels que $\cancel{z \mapsto} \frac{z}{z-i} \in \mathbb{R}$. oui
On a donc les équivalences suivantes :

$\frac{z}{z-i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z}{z-i} = \overline{\left(\frac{z}{z-i}\right)}$ Mieux !

$\Leftrightarrow \frac{z}{z-i} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}+i}$ ✓

$\Leftrightarrow z(\bar{z}+i) = \bar{z}(z-i)$ ✓ CAR

$\Leftrightarrow |z|^2 + zi = |z|^2 - \bar{z}i$ ✓

$\Leftrightarrow zi = -\bar{z}i$ ✓

$\Leftrightarrow z = -\bar{z}$ ✓

Conclusion,

$$\boxed{\frac{z}{z-i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}} \setminus \{i\}$$ oui bien.

D'un point de vue géométrique, on en conclu~~e~~t donc que M(z) ∈ $\mathscr{P}$. ?