Correction de l'exercice Automne 06
Fonctions réelles

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $1+\mathrm{e}^{-x} > 0$ et ainsi $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$ tout entier. De plus f est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = -\frac{(1+\mathrm{e}^{-x})'}{1+\mathrm{e}^{-x}} = -\frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x}+1}.$$
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) > 0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et donc par composée de limites,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
Autrement dit f admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $+\infty$.
D'autre part, $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc par composée de limites,
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = -\infty.$$
Conclusion, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$ $\nearrow$	0

Notez que par le théorème de la bijection, f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_-^*$. De plus sa fonction réciproque est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$.

2. On a déjà vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Donc
$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ admet en } +\infty \text{ une asymptote horizontale d'équation } y=0.}$$
De plus, on a également vu que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Regardons en conséquence si f admet une direction asymptotique affine ou une branche parabolique (verticale ou horizontale). On étudie alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Posons $u=-x$ (non obligatoire). On a alors
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{u\to+\infty} \frac{-\ln\left(1+\mathrm{e}^{u}\right)}{-u} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{u}\right)}{u}.$$
Méthode classique qu'il faudra maitriser, on factorise dans le logarithme par le terme prépondérant :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{u}\left(1+\mathrm{e}^{-u}\right)\right)}{u} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{u}\right)+\ln\left(1+\mathrm{e}^{-u}\right)}{u} &= \lim_{u\to+\infty} \frac{u+\ln\left(1+\mathrm{e}^{-u}\right)}{u} \\ &= \lim_{u\to+\infty} 1+\frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-u}\right)}{u}\end{aligned}$$
Or $\lim\limits_{u\to+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-u}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-u}\right)}{u} = 0$. Finalement,
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1+0 = 1.$$

La fonction f admet donc une direction asymptotique affine. Regardons si cette direction donne une asymptote ou juste une direction parabolique. On étudie pour ce faire $\lim_{x \to -\infty} f(x) - x$. Comme précédemment,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim_{u \to +\infty} -\left(u + \ln\left(\mathrm{e}^{-u} + 1\right)\right) - (-u) = \lim_{u \to +\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-u}\right) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ admet une asymptote oblique d'équation } y = x \text{ en } -\infty.}$$