

## Correction de l'exercice Automne 06

### Fonctions réelles

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-x} > 0$ , donc  $1 + e^{-x} > 0$  et ainsi  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier. De plus  $f$  est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = -\frac{(1 + e^{-x})'}{1 + e^{-x}} = -\frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{e^x + 1}.$$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$   $f'(x) > 0$ . Donc la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . De plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  et donc par composée de limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

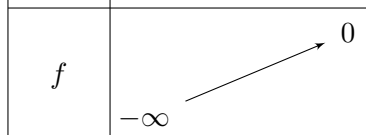
Autrement dit  $f$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$  en  $+\infty$ .

D'autre part,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ , donc par composée de limites,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln(1 + e^{-x}) = -\infty.$$

Conclusion, on obtient le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f$	$-\infty$	$0$



Notez que par le théorème de la bijection,  $f$  définit une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^*$ . De plus sa fonction réciproque est continue et strictement croissante sur  $] -\infty ; 0[$ .

2. On a déjà vu que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Donc

le graphe de  $f$  admet en  $+\infty$  une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$ .

De plus, on a également vu que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . Regardons en conséquence si  $f$  admet une direction

asymptotique affine ou une branche parabolique (verticale ou horizontale). On étudie alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

Posons  $u = -x$  (non obligatoire). On a alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(1 + e^u)}{-u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^u)}{u}.$$

Méthode classique qu'il faudra maîtriser, on factorise dans le logarithme par le terme prépondérant :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^u(1 + e^{-u}))}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^u) + \ln(1 + e^{-u})}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u + \ln(1 + e^{-u})}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(1 + e^{-u})}{u} \end{aligned}$$

Or  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-u}) = 0$  donc  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{-u})}{u} = 0$ . Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + 0 = 1.$$

La fonction  $f$  admet donc une direction asymptotique affine. Regardons si cette direction donne une asymptote ou juste une direction parabolique. On étudie pour ce faire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x$ . Comme précédemment,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{u \rightarrow +\infty} -(u + \ln(e^{-u} + 1)) - (-u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-u}) = 0.$$

Conclusion,

le graphe de  $f$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = x$  en  $-\infty$ .