Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right]$$

on reconnait une somme double ✓

donc

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} \underbrace{\left[\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right]}_{\text{ici on reconnait une somme télescopique}}$$ Bien.

Oui!

donc

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} - \binom{n+1}{n+1}$$ TB.

Or $\binom{n+1}{n+1} = 1$ ✓

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \left(\binom{n+1}{i} - 1 \right)$$ ✓

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} - \sum_{i=0}^{n} 1$$ ✓

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} - (n+1)$$ ✓ Bien.

Il te manque le terme d'ordre n+1 à introduire.

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} 1^i \times 1^{(n+1)-i} - (n+1)$$

$$\Rightarrow S_n = (1+1)^{n+1} - (n+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = 2^{n+1} - (n+1)}$$