Correction de l'exercice Automne 08
Calcul algébrique

Méthode 1, en sommant en interne sur k. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$S_n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right] = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right].$$

On reconnait en interne une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n} \left[\binom{n+1}{i} - \binom{n+1}{n+1} \right] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left[\binom{n+1}{i} - 1 \right] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} - \sum_{i=0}^{n} 1 \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - \binom{n+1}{n+1} - (n+1) \\
&= 2^{n+1} - 1 - (n+1) \qquad \text{car on reconnait un binôme de Newton} \\
&= 2^{n+1} - (n+2)\,.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = 2^{n+1} - (n+2)\,.}$$

Vérification, si $n = 1$,

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant 1} \left[\binom{2}{k} - \binom{2}{k+1} \right] \\
&= \underbrace{\left[\binom{2}{0} - \binom{2}{1} \right]}_{i=0,k=0} + \underbrace{\left[\binom{2}{1} - \binom{2}{2} \right]}_{i=0,k=1} + \underbrace{\left[\binom{2}{1} - \binom{2}{2} \right]}_{i=1,k=1} \\
&= 1 - 2 + 2 - 1 + 2 - 1 = 1.
\end{aligned}$$

Et $2^{n+1} - (n+2) = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$, OK !

Méthode 2, en sommant en interne sur i. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$S_n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right] = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right].$$

Le terme $\left[\binom{n+1}{k}-\binom{n+1}{k+1}\right]$ ne dépend pas de i. Ainsi,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n}\left(\left[\binom{n+1}{k}-\binom{n+1}{k+1}\right]\sum_{i=0}^{k}1\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\left[\binom{n+1}{k}-\binom{n+1}{k+1}\right](k+1)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n+1}{k}(k+1)-\binom{n+1}{k+1}(k+1)\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n+1}{k}k+\binom{n+1}{k}-\binom{n+1}{k+1}(k+1)\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n+1}{k}k-\binom{n+1}{k+1}(k+1)\right]+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

On reconnait dans la première somme, une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
S_n &= \binom{n+1}{0}\times 0-\binom{n+1}{n+1}(n+1)+\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}-1\\
&= -(n+1)+2^{n+1}-1 \qquad \text{car on reconnait un binôme de Newton}\\
&= 2^{n+1}-(n+2).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = 2^{n+1}-(n+2).}$$