Soit : $f : D_f \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 + 1 - \frac{2}{x}$

① Soit $x \in \mathbb{R}$

$x \in D_f \iff x \neq 0$ ✓
donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}^*}$ ✓

② f, quotient de fonctions dérivables sur leurs ensembles de définitions donc f est dérivable sur le sien. oui

$\forall x \in \mathbb{R}^*$; $f'(x) = 2x + \frac{2}{x^2}$ ✓

$f'(x)$ a le signe de $2x$ car $\frac{2}{x^2} > 0$???

$x+1$ n'a pas le signe de x sur]-1;0[par exemple même si 1 > 0...

$f'(x) \geq 0 \iff 2x \geq 0$
$f'(x) \geq 0 \iff x \geq 0$

- sur $]-\infty\ 0[$; $f'(x)$ est négatif donc f y est strictement décroissante.
- sur $]0\ +\infty[$; $f'(x)$ est positif donc f y est strictement croissante.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	‖	$+$	
f	$+\infty$ ↘		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ oui
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
$\lim_{x \to 0^<} f(x)$

Dur de décroitre jusqu'à +l'infini non ?

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$; $f(x) = x^2 + 1 - \frac{2}{x}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} x^2 = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} 1 = 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(-\frac{2}{0^-}\right) = +\infty$ oui !

Par somme

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty}$ ✓

• De la même manière

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty}$ bien.

(3) De plus $f(-2) = 4 + 1 + 1 = 6$ ✓

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 1 + 2 = \frac{13}{4}$ ✓

Il faut justifier en s'appuyant sur le tableau de variations.

Donc $f\left(\left[-2 ; -\frac{1}{2}\right]\right) = \left[\frac{13}{4} ; 6\right]$.

(4) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$f(x) = 0 \iff x^2 + 1 - \frac{2}{x} = 0$ ✓

$\iff \frac{x^3 + x - 2}{x} = 0$ oui

$f(x) = 0 \iff x^3 + x - 2 = 0$ ✓

1 est une solution évidente

donc $x^3 + x - 2 = 0 \iff (x-1)(x^2+x+2) = 0$ oui!

$f(x) = 0 \iff (x-1)(x^2+x+2) = 0$ ✓

$\iff x - 1 = 0$ ou $x^2 + x + 2 = 0$ ✓

$\iff x = 1$ ou $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ ✓

donc l'équation n'admet pas de racines ✓.

L'ensemble des solutions est :

$\boxed{S = \{1\}}$ Oui!

(5)

Calculons $f^{\leftarrow}([0;+\infty[)$:

D'après la question (4)

$\forall x \in \mathbb{R}^*$; $f(x) = 0 \iff x = 1$

Incohérent.

Ainsi $f^{\leftarrow}([0;+\infty[) = [1;+\infty[$

(6) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$f(x) = 4 \iff x^2 + 1 - \frac{2}{x} = 4$ ✓

$\iff \frac{x^3 + x - 2}{x} = 4$ ✓

$f(x) = 4 \iff x^3 - 3x - 2 = 0$ Oui

or 2 est une solution évidente bien.

donc $x^3 - 3x - 2 \iff (x-2)(x^2+2x+1)$ ✓

$f(x) = 4 \iff (x-2)(x^2+2x+1) = 0$

$\iff x-2=0$ ou $x^2+2x+1=0$

$\iff x=2$ ou $\Delta = 4-4=0$

$f(x)=4 \iff x=2$ ou $x=-1$ Oui

L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{S = \{-1 ; 2\}}$$ Bien.

7) f n'est pas injective car 4 admet deux antécédents -1 et 2.

8) f est surjective car 0 et 4 admettent au moins un antécédent.

Insuffisant.