Correction de l'exercice Automne 09
Bijection

1. La fonction $x \mapsto x^2+1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \frac{2}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Conclusion,
$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*.}$$

2. La fonction f est continue et dérivable sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$ comme différence de fonctions définies et dérivables sur leurs ensembles de définition et de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f'(x) = 2x - \frac{-1}{x^2} = 2x + \frac{2}{x^2} = \frac{2\left(x^3+1\right)}{x^2}.$$
$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{2(x^3+1)}{x^2}.}$
On en déduit les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2\left(x^3+1\right)}{x^2} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^3+1 \geqslant 0 \qquad \text{car } \forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^3 \geqslant -1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \geqslant -1 \qquad \text{car la fonction cube est bijective sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$
On obtient ainsi le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	‖	$\nearrow$	

Complétons le tableau. D'une part, $f(-1) = (-1)^2 + 1 - \frac{2}{-1} = 4$. D'autre part, quand $x \to -\infty$, on a $\frac{2}{x} \to 0$ et $x^2+1 \to +\infty$, donc
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$
De même, quand $x \to +\infty$, on a $\frac{2}{x} \to 0$ et $x^2+1 \to +\infty$, donc
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
Enfin, quand $x \to 0^-$, on a $-\frac{2}{x} \to +\infty$ et $x^2+1 \to 1$, donc
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty.$$
De même, quand $x \to 0^+$, on a $-\frac{2}{x} \to -\infty$ et $x^2+1 \to 1$, donc
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty.$$
Conclusion, on obtient le tableau de variation de f suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Calculons,

$$f(-2) = 4 + 1 - \frac{2}{-2} = 5 + 1 = 6 \qquad \text{et} \qquad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{2}{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{4} + 4 = \frac{21}{4}.$$

Donc par la question précédente, on observe que

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{1}{2}$		0
f	$+\infty$	$\searrow$	6	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\frac{21}{4}$	$\nearrow$	$+\infty \;\|$

Conclusion,

$$\boxed{f\left(\left[-2; -\frac{1}{2}\right]\right) = [4; 6].}$$

4. Soit $x \in \mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$. On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + 1 - \frac{2}{x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^3 + x - 2 = 0 \qquad\qquad \text{car } x \neq 0.$$

On observe que 1 est une racine évidente : $1^3 + 1 - 2 = 0$ Donc

$$x^3 + x - 2 = (x-1)\left(x^2 + x + 2\right).$$

Soit Δ le discriminant de $X^2 + X + 2$, $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$. Donc $x^2 + x + 2 \neq 0$. Ainsi,

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-1)\left(x^2 + x + 2\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1.$$

Conclusion, pour $x \in \mathscr{D}_f$,

$$\boxed{f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1.}$$

5. Par les questions précédentes, on a

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Par conséquent,

$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{R}_+) =]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[.}$$

6. Soit $x \in \mathscr{D}_f$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = 4 \quad & \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 - \frac{2}{x} = 4 \\ & \Leftrightarrow \quad x^3 + x - 2 = 4x \qquad \text{car } x \neq 0 \\ & \Leftrightarrow \quad x^3 - 3x - 2 = 0. \end{aligned}$$

   On observe que -1 est une racine évidente. Donc

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)\left(x^2 - x - 2\right).$$

   Soit Δ le discriminant de $X^2 - X - 2$. On a $\Delta = 1 + 8 = 9$. Donc les racines associées sont $\frac{1-3}{2} = -1$ et $\frac{1+3}{2} = 2$. Ainsi

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2).$$

   D'où,

$$f(x) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x+1 = 0 \ \text{ OU } \ x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \ \text{ OU } \ x = 2.$$

   Conclusion, pour $x \in \mathscr{D}_f$,

$$\boxed{f(x) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \ \text{ OU } \ x = 2.}$$

7. Par la question précédente, 4 possède deux antécédents, -1 et 2. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est pas injective sur } \mathscr{D}_f.}$$

8. La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Donc par le théorème de la bijection, f restreinte à $]0;+\infty[$ définit une bijection de $]0;+\infty[$ dans $f\left(]0;+\infty[\right) = \left] \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right[= \mathbb{R}$. Notamment tous réel $y \in \mathbb{R}$ admet par f un antécédent dans $\mathbb{R}_+^*$ et donc notamment dans $\mathscr{D}_f$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est surjective dans } \mathbb{R}.}$$