Garnier
Raphaël

Exercice Automne 10
Complexes

1. Soit $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $|a| < 1$ et $f(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

Soit $z \in \mathbb{C}$.

Pour ne pas avoir de problème dans l'ensemble de définition, $\bar{a}z$ ne doit pas être égal à 1, donc $z \neq \frac{1}{\bar{a}}$. On a donc

A considérer

$D_f = \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{\bar{a}}\right\}$. On doit également vérifier que $\forall z \in \mathbb{U}$, $z \in D_f$. Je vais procéder par contraposée. Si $z \notin D_f$, alors $z = \frac{1}{\bar{a}}$. On sait que $|\bar{a}| = |a|$. Puisque $\left|\frac{1}{\bar{a}}\right| = \frac{|1|}{|\bar{a}|}$, alors $\left|\frac{1}{\bar{a}}\right| = \frac{|1|}{|a|}$. Or on sait que $|a| < 1$, donc $\left|\frac{1}{a}\right| > 1$. La contraposée est vraie, $z \notin D_f \Rightarrow z \notin \mathbb{U}$, donc $\mathbb{U} \subseteq D_f$. OK

Soit $z \in \mathbb{C}$

2. Si $f(z) \in \mathbb{U}$, ~~alors~~ $|f(z)| = 1$. Pour que $|f(z)| = 1$, il faut que $\frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|} = 1$. Il faut donc $|z-a| = |1-\bar{a}z|$ car $1-\bar{a}z \neq 0$

Je vais de nouveau procéder par contraposée : Si $z \notin \mathbb{U}$ ~~alors~~ $f(z) \notin \mathbb{U}$. Prenons $z = 0$. On vérifie si $|0-a| = |1-\bar{a} \times 0|$. On obtient $|-a| = |1|$ $\Leftrightarrow |a| = 1$. Cependant on sait que $|a| < 1$, donc $f(z)$ n'existe même pas ??? et donc n'appartient pas à $\mathbb{U}$. La contraposée est vraie, donc $f(z) \in \mathbb{U} \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}$

A bien revoir.