Correction de l'exercice Automne 11
Fonctions usuelles

1. Soit $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in \mathscr{D}_f \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + 2x - 1 \neq 0.$$

Soit Δ le discriminant de $x^2 + 2x - 1$. On a $\Delta = 4 + 4 = 8$, par conséquent les racines de ce polynôme sont $\frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$ et $\frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}$. Conclusion, le domaine de définition de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\}.}$$

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition comme quotient et composée de fonctions dérivables sur leurs domaines de définition. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\}.}$$

2. Soit $x \in \mathscr{D}_f$. On a par dérivation d'une composée et d'un quotient,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}\right)' \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)^2} \\
&= \frac{(2x-2)\left(x^2 + 2x - 1\right) - \left(x^2 - 2x - 1\right)(2x+2)}{\left(x^2 + 2x - 1\right)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)^2} \\
&= \frac{2x^3 + 4x^2 - 2x - 2x^2 - 4x + 2 - \left(2x^3 + 2x^2 - 4x^2 - 4x - 2x - 2\right)}{\left(x^2 + 2x - 1\right)^2 + \left(x^2 - 2x - 1\right)^2} \\
&= \frac{4x^2 + 4}{x^4 + 4x^2 + 1 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^3 - 2x^2 + 4x} \\
&= \frac{4\left(x^2 + 1\right)}{2x^4 + 4x^2 + 2} \\
&= \frac{2\left(x^2 + 1\right)}{x^4 + 2x^2 + 1} \\
&= \frac{2\left(x^2 + 1\right)}{\left(x^2 + 1\right)^2} \\
&= \frac{2}{x^2 + 1} \qquad \text{car } x^2 + 1 \neq 0
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad f'(x) = \frac{2}{x^2 + 1}.}$$

3. On a donc pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,

$$\boxed{f'(x) = 2\arctan'(x).}$$

On souhaite intégrer cette égalité pour obtenir une expression plus simple de f. ATTENTION ! On ne peut intégrer que sur des intervalles. Donc il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \left]-\infty; -1 - \sqrt{2}\right[$,

$$f(x) = 2\arctan(x) + C_1.$$

De même, il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \left]-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\right[$,

$$f(x) = 2\arctan(x) + C_2.$$

Et enfin, il existe $C_3 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \left]-1+\sqrt{2};+\infty\right[$,

$$f(x) = 2\arctan(x) + C_3.$$

On détermine ces constantes.

- D'une part, $f(0) = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Et d'autre part, $f(0) = 2\arctan(0) + C_2 = C_2$. Donc $C_2 = \frac{\pi}{4}$.
- De façon analogue, puisque

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Par continuité de la fonction arctan en 1, on en déduit que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{u\to1} \arctan(u) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

D'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) + C_1 = -2\frac{\pi}{2} + C_1 = C_1 - \pi$. Par conséquent, $C_1 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

- De la même façon $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1} = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.
Puis, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2\frac{\pi}{2} + C_3$. Donc $C_3 = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$.

Conclusion

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 2\arctan(x) + \frac{5\pi}{4} & \text{si } x \in \left]-\infty;-1-\sqrt{2}\right[\\ 2\arctan(x) + \frac{\pi}{4} & \text{si } x \in \left]-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right[\\ 2\arctan(x) - \frac{3\pi}{4} & \text{si } x \in \left]-1+\sqrt{2};+\infty\right[\end{cases}}$$

4. On obtient le graphe de f par une dilatation verticale de facteur 2 de la fonction arctangente puis par une translation verticale de vecteur $\frac{5\pi}{4}\vec{i}$, $\frac{\pi}{4}\vec{i}$ et $-\frac{3\pi}{4}\vec{i}$ respectivement sur chacun des intervalles.