Correction de l'exercice Hiver 01
Polynômes

Solution de l'exercice 1 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{1+\operatorname{sh}(n)}$. On a $1 + \operatorname{sh}(n) = 1 + \frac{\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^n}{2}$. Donc par passage à l'inverse,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,\mathrm{e}^{-n}.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2\,\mathrm{e}^{-n} \geqslant 0$. Donc par le théorème des équivalents pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2\,\mathrm{e}^{-n}$ sont de même nature. Or $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2\,\mathrm{e}^{-n}$ converge en tant que série géométrique de raison $q = \mathrm{e}^{-1}$ et $|q| < 1$. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+\operatorname{sh}(n)} \text{ converge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. Par le binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}
P = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - X^{2n} - 2X - 1 &= \sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k} X^k \qquad \text{car } 2n-1 \geqslant 1 \text{ car } n \geqslant 2\\
&= \frac{(2n)!}{(2n-1)!1!} X^{2n-1} + \sum_{k=1}^{2n-2} \binom{2n}{k} X^k - 2X\\
&= 2nX^{2n-1} + \sum_{k=1}^{2n-2} \binom{2n}{k} X^k - 2X
\end{aligned}$$

   Or $2n - 1 > 1$ car $n \geqslant 2$. Conclusion,

$$\boxed{d = \deg(P) = 2n-1.}$$

2. Poursuivons les calculs précédents,

$$\begin{aligned}
P &= 2nX^{2n-1} + \frac{(2n)!}{(2n-2)!2!} X^{2n-2} + \sum_{k=1}^{2n-3} \binom{2n}{k} X^k - 2X \qquad \text{car } 2n-2 \geqslant 1 \text{ car } n \geqslant 2\\
&= 2nX^{2n-1} + \frac{(2n)(2n-1)}{2} X^{2n-2} + \sum_{k=1}^{2n-3} \binom{2n}{k} X^k - 2X\\
&= 2nX^{2n-1} + n(2n-1)X^{2n-2} + \sum_{k=1}^{2n-3} \binom{2n}{k} X^k - 2X.
\end{aligned}$$

   Puisque $2n - 2 > 1$ (car $n \geqslant 2$) alors en notant $a_0, \dots, a_d$ les coefficients de P, on a $a_{d-1} = n(2n-1)$ et $a_d = 2n$ (rappelons que $d = 2n-1$). Alors, par la relation racine-coefficient, on a

$$\boxed{\sum_{k=1}^{d} r_k = -\frac{a_{d-1}}{a_d} = -\frac{n(2n-1)}{2n} = -\frac{2n-1}{2}.}$$

3. On observe que

$$P(-1) = (0)^{2n} - (-1)^{2n} - 2(-1) - 1 = -1 + 2 - 1 = 0.$$

Donc -1 est une racine de P. De plus,

$$P' = 2n\,(X+1)^{2n-1} - 2nX^{2n-1} - 2 \qquad \text{car } 2n-1 \geqslant 0 \text{ car } n \geqslant 2.$$

Dès lors,

$$P'(-1) = 0 + 2n - 2 > 0 \qquad \text{car } n \geqslant 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{-1 \text{ est une racine simple de } P.}$$

4. On note que $2X^3 + 3X^2 + X = X\left(2X^2 + 3X + 1\right)$. Puis on remarque que -1 est une racine de $2X^2 + 3X + 1$ donc $X+1$ divise $2X^2 + 3X + 1$ et même $2X^2 + 3X + 1 = (X+1)(2X+1)$. Ainsi,

$$2X^3 + 3X^2 + X = X\,(X+1)\,(2X+1)\,.$$

Par suite, $2X^3 + 3X^2 + X$ admet trois racines simples distinctes : 0, -1, $-\frac{1}{2}$. On a déjà vu que -1 est une racine de P. Observons également que

$$P(0) = 1^{2n} - 0 - 0 - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad P\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} + 2\frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} + 0 = 0.$$

Donc 0, -1, $-\frac{1}{2}$ sont aussi racines de P. Toutes les racines de $2X^3+3X^2+X$ sont racines de P (avec une multiplicité supérieure). Conclusion,

$$\boxed{2X^3 + 3X^2 + X \text{ divise } P.}$$