Ex 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k^2} f\left(\frac{1}{1+k^2}\right)$

f est continue sur le segment $[0;1]$.
f est bornée sur $[0;1]$
et atteint ses bornes : $\exists (\alpha,\beta) \in [0;1]^2$,
$f(\alpha) = m = \inf_{x\in[0;1]} f(x)$ et $f(\beta) = M = \sup_{x\in[0;1]} f(x)$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^2+1}$ v $= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$

$\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{\sim} 1 \Rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ OK !

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ v

Alors $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n^2+1}\right) = f(0)$ par continuité de f en 0

$\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k^2} f\left(\frac{1}{1+k^2}\right)$ Non.

??! $\underset{n\to+\infty}{=} f(0) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge comme série de Riemann d'exposant
$\alpha = 2$ oui ! Donc par le théorème des équivalents des séries
à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+1}$ converge. v

Donc ~~$S_n \underset{n\to+\infty}{=}$~~ $f(0) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge. oui