Correction de l'exercice Hiver 02
Continuité, dérivabilité

Solution de l'exercice 1 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n^2+1} f\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$.

Méthode 1. Puisque la fonction f est **continue** sur le **segment** $[0;1]$, par le théorème des bornes atteintes, f est bornée sur $[0;1]$ (et atteint ses bornes). Donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in [0;1], \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n^2+1} \in]0;1]$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|f\left(\frac{1}{n^2+1}\right)\right| \leqslant M.$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| = \frac{1}{n^2+1}\left|f\left(\frac{1}{n^2+1}\right)\right| \leqslant \frac{M}{n^2+1} \leqslant \frac{M}{n^2}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{M}{n^2}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{M}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Autrement dit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}}$$

Méthode 2. On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$. Donc par continuité de f en 0, on obtient,

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n^2+1}\right) = f(0).$$

Premier cas, $f(0) \neq 0$. Dans ce cas,

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} f\left(\frac{1}{n^2+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \times f(0) = \frac{f(0)}{n^2}.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{f(0)}{n^2}$ est de signe constant (celui de $f(0)$). Enfin, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{f(0)}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Conclusion, par le théorème des équivalents des séries à termes de signe constant, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Second cas, $f(0) = 0$. Dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n^2+1}\right) = 0$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|f\left(\frac{1}{n^2+1}\right)\right| \leqslant 1.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant |u_n| = \left|\frac{1}{n^2+1} f\left(\frac{1}{n^2+1}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n^2+1} \times 1 \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Autrement dit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion, dans tous les cas,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. La fonction f est **continue** sur le **segment** $[-1;1]$. Donc par le théorème des bornes atteintes, la fonction f est bornée et atteint ses bornes sur $[-1;1]$:

$$\exists\,(a,b) \in [-1;1]^2\,,\ \forall x \in [-1;1]\,,\quad f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b).$$

Posons $M = \max\left(-f(a), f(b)\right) = \max\left(|f(a)|\,, |f(b)|\right)$, alors,

$$\forall x \in [-1;1]\,,\quad |f(x)| \leqslant M.$$

Posons $\alpha = \begin{cases} a & \text{si } M = |f(a)| \\ b & \text{si } M = |f(b)| \end{cases}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in [-1;1]\,,\quad |f(x)| \leqslant |f(\alpha)|\,.}$$

2. La fonction f est continue sur $[-1;1]$. De plus, f est dérivable sur $]-1;0[$. Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists a \in\,]-1;0[\,,\quad f'(a) = \frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)} = \frac{-(-1)}{1} = 1.$$

De même f est continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$. Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists b \in\,]0;1[\,,\quad f'(b) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1.$$

On note que $a < 0 < b$ donc $a < b$. Puisque f est deux fois dérivable sur $]-1;1[$, alors la fonction f' est dérivable et donc continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists c \in\,]a;b[\,,\quad f''(c) = \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a} = \frac{1-1}{b-a} = 0.$$

Comme $]a;b[\, \subseteq\,]-1;1[$, on conclut que

$$\boxed{\exists c \in\,]-1;1[\,,\quad f''(c) = 0.}$$