Exercice Hiver 03
Espaces vectoriels

Exercice 1 Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n-1}{3^n}$ et calculer sa somme totale.

Exercice 2 Soit $F = \{\, P \in \mathbb{R}_4[X] \mid (X+3)\,P = X\,P\,(X+1)\,\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Soit $P \in F$. Montrer que 0 et -2 sont des racines de P. Puis que -1 est aussi une racine de P.
3. En déduire que $F \subseteq \mathrm{Vect}\left(X\,(X+1)\,(X+2)\,, X^2\,(X+1)\,(X+2)\right)$.
4. Montrer que $\mathscr{B}_F = (X\,(X+1)\,(X+2))$ est une base de F.
5. Montrer que $G = \mathrm{Vect}\left(1, X, X^2, X^4\right)$ est un supplémentaire de F.