Posons $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = \frac{n-1}{3^n}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k-1}{3^k}$

On a $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3^n}$ V et $n^2 \times \frac{n}{3^n} = \frac{n^3}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ V par croissance comparée. V

Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0$

$\left|\frac{n^3}{3^n}\right| \leq 1$ i.e $0 \leq \frac{n^3}{3^n} \leq 1$ car donc $0 \leq \frac{n}{3^n} \leq \frac{1}{n^2} \iff 0 \leq U_n \leq \frac{1}{n^2}$ V

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$ V

Donc par le théorème de comparaison par les séries à termes positifs,

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{3^n}$ converge. Bien

Et par le théorème des équivalents de séries à termes positifs,

$\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ converge. V

à écrire $\forall n \geq 0$ $\frac{n^3}{3^n} \geq 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k-1}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} \quad V$$

Pour la somme à gauche posons $\hat{k} = k+1$ i.e. $k = \hat{k} - 1$ V

$$S_n = \sum_{\hat{k}=1}^{n+1} \frac{\hat{k}-1}{3^{\hat{k}-1}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} \quad V$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{3^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} \quad V$$

$$= 3\left(\frac{n}{3^{n+1}} + S_n - \frac{(-1)}{1}\right) - \cancel{\frac{1}{3}} \times \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}}$$

car on reconnaît

$$= 3 + \frac{n}{3^n} + 3S_n - 3\,\frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{2}$$

$$\Rightarrow 2S_n = -3 + \frac{1}{2} - \frac{n}{3^{n-1}} \; ? \; - \frac{1}{2\times 3^{n+1}}$$

D'où $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k-1}{3^k} = \lim_{n\to+\infty} S_n = -\frac{5}{4}}$

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid (X+3)P = XP(X+1)\}$

1) Montrons que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

- $F \subseteq \mathbb{R}_4[X]$ par définition ✓
- Soit $U = 0_{\mathbb{R}_4[X]} = 0$

$$(X+3) \times 0 = X \times 0 \quad ✓$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

Donc $0_{\mathbb{R}_4[X]} \in F$ ✓

- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(P,Q) \in F^2$ tels que $M = \lambda P + \mu Q$

On a $(X+3)M = XM(X+1)$ A démontrer et non à supposer !

$$\Rightarrow (X+3)(\lambda P + \mu Q) = X(\lambda P(X+1) + \mu Q(X+1))$$
$$\Rightarrow \lambda(X+3)P + \mu(X+3)Q = \lambda X P(X+1) + \mu X Q(X+1)$$

Revoir la rédaction, les implications doivent être dans l'autre sens.

toujours vrai car P et $Q \in F$

donc $(X+3)P = XP(X+1)$ et $(X+3)Q = XQ(X+1)$

$\Rightarrow \lambda(X+3)P = \lambda XP(X+1)$ $\quad \Rightarrow \mu(X+3)Q = \mu XQ(X+1)$

Donc F est stable par combinaisons linéaires, donc $\boxed{\text{F est un sous espace vectoriel de } \mathbb{R}_4[X]}$.

2) Soit $P \in F$

On a donc $(X+3)P = XP(X+1)$

$$\Rightarrow P = \cancel{\frac{XP(X+1)}{X+3}}$$

$$\Rightarrow P(X+1) = \cancel{\frac{(X+3)P}{X}}$$

alors, $P(0) = \frac{0 \times P(1)}{0+3} = 0$

$\boxed{\text{Donc 0 est racine de } P}$

Ne JAMAIS diviser par un polynôme !

alors $P(-2) = \frac{(-3+3)P(-3)}{-3} = 0$

$\boxed{\text{Donc } -2 \text{ est racine de } P.}$

$$\Rightarrow P(-2) = 0 = \frac{-2P(-2+1)}{-2+3} = -2P(-1)$$
$$\Rightarrow P(-1) = 0$$

Donc $\boxed{-1 \text{ est racine de } P}$

3) Soit $P \in F$ D'après la question précédente, $(X-0)(X+1)(X+2) \mid P$

$$\Rightarrow X(X+1)(X+2) \mid P \quad \text{oui}$$

Et $P \in \mathbb{R}_4[X]$ donc $\exists (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 \mid P = X(X+1)(X+2)(a_0 + a_1 X)$ ✓

$$= a_0 X(X+1)(X+2) + a_1 X^2(X+1)(X+2) \quad ✓$$

Donc $P \in \mathrm{Vect}(X(X+1)(X+2), X^2(X+1)(X+2))$ Bien.

Ainsi $P \in F \Rightarrow P \in \mathrm{Vect}(X(X+1)(X+2), X^2(X+1)(X+2))$

Donc $\boxed{F \subseteq \mathrm{Vect}(X(X+1)(X+2), X^2(X+1)(X+2))}$. Oui

4) Soit $B_F = (X(X+1)(X+2))$ Montrons que B_F est une base de F

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X(X+1)(X+2) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$

Donc B_F est libre OK

Soit $P \in F$, montrons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P = \alpha X(X+1)(X+2)$ ✓

On a donc $(X+3)P = XP(X+1)$ Je ne comprends pas l'implication...

$\Rightarrow \alpha X(X+1)(X+2)(X+3) = \alpha X(X+1)((X+1)+1)((X+2)+1))$

$\Rightarrow \alpha X(X+1)(X+2)(X+3) = \alpha X(X+1)(X+2)(X+3)$

$\Rightarrow \alpha = \alpha$

Donc vrai $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

A revoir.

Ainsi B_F est génératrice dans F

Conclusion $\boxed{B_F \text{ est une base de } F.}$

5) Soit $G = Vect(1, X, X^2, X^4)$ et $B_F = (X(X+1)(X+2))$ base de F.

Montrons que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_4[X]}\}$ V

OK

$F \cap G = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^4 \mid (X+3)(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^4) = X(a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)^2 + a_3(X+1)^4)$ ET $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4\}$

$(S) = 3a_0 + (a_0 + 3a_1)X + (a_1 + 3a_2)X^2 + a_2X^3 + 3a_3X^4 + a_3X^5$

$= X(a_0 + a_1X + a_1 + a_2X^2 + 2a_2X + a_2 + a_3X^4 + 4a_3X^3 + 6a_3X^2 + 4a_3X + a_3)$

Par unicité...

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a_0 = 0 \\ a_0 + 3a_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 + 3a_2 = a_1 + 2a_2 + 4a_3 \\ a_2 = a_2 + 6a_3 \\ 3a_3 = 4a_3 \\ a_3 = a_3 \end{cases}$ OK $\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ 3a_1 = a_1 \\ a_1 = a_1 \\ a_2 = 0 \\ a_2 = a_2 \\ a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$ V

Donc $F \cap G = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P = 0\}$

$= \{0_{\mathbb{R}_4[X]}\}$ OK

Montrons que $F + G = \mathbb{R}_4[X]$

$F = Vect(X(X+1)(X+2))$ et $G = Vect(1, X, X^2, X^4)$ V

Donc $F + G = Vect(1, X, X^2, X^4, X(X+1)(X+2))$ V

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, donc, on a

$F+G = Vect(1, X, X^2, X^3+3X^2+2X, X^4)$ $C_4 \leftrightarrow C_5$ V

$= Vect(1, X, X^2, X^3+3X^2, X^4)$ $C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2$

$= Vect(1, X, X^2, X^3, X^4)$ $C_4 \leftarrow C_4 - 3C_3$ V

$= \mathbb{R}_4[X]$ car on reconnait...

Conclusion = $\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}_4[X]}$ Bien.