Correction de l'exercice Hiver 03
Espaces vectoriels

Solution de l'exercice 1 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n-1}{3^n}$. Par croissance comparée,

$$n^2 u_n = \frac{n^3 - n^2}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 u_n \leqslant 1$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$. Donc

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 0$. Donc par le théorème de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n-1}{3^n} \text{ converge.}}$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{k-1}{3^k}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} - \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} \qquad \text{car on reconnait une série géométrique.}$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
T_n &= 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} \\
&= \sum_{\tilde{k}=0}^{n-1} \frac{\tilde{k}+1}{3^{\tilde{k}+1}} \qquad \text{en posant } \tilde{k} = k-1 \\
&= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{3^k} + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} \\
&= \frac{1}{3}\left(T_n - \frac{n}{3^n}\right) + \frac{1}{3} \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3} T_n - \frac{n}{3^{n+1}} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$T_n = \frac{3}{2}\left(-\frac{n}{3^{n+1}} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\right) = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{2 \times 3^n}.$$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{2 \times 3^n} - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

Conclusion, par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on a par croissance comparée,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k-1}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}.}$$

Solution de l'exercice 2

1. On observe que
   - $F \subseteq \mathbb{R}_4[X]$ par définition.
   - Si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$, alors $(X+3)\,P = 0_{\mathbb{R}[X]} = XP\,(X+1)$. Donc $0_{\mathbb{R}[X]} \in F$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in F^2$. Posons $R = \lambda\,P + \mu Q$. Montrons que $R \in F$. On a les égalités entre polynômes suivantes :

$$\begin{aligned}(X+3)\,R &= (X+3)\,(\lambda\,P + \mu Q)\\ &= \lambda\,(X+3)\,P + \mu\,(X+3)\,Q\\ &= \lambda\,XP\,(X+1) + \mu XQ\,(X+1) && \text{car } P \in F \text{ et } Q \in F\\ &= X\,(\lambda\,P + \mu Q) \circ (X+1)\\ &= XR\,(X+1)\,.\end{aligned}$$

   Donc $R \in F$ et F est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion,

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_4[X].}$$

2. Soit $P \in F$, alors $(X+3)\,P = XP\,(X+1)$. Evaluons en 0. On a

$$3P(0) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad P(0) = 0.$$

   Donc 0 est une racine de P. De plus, en évaluant en -3,

$$0 = -3P(-2) \qquad \Leftrightarrow \qquad P(-2) = 0.$$

   Donc -2 est une racine de P. Enfin, on évalue en -1 (cela marche aussi pour -2) :

$$2P(-1) = -P(0) = 0 \text{ car } 0 \text{ racine de } P \qquad \Leftrightarrow \qquad P(-1) = 0.$$

   Conclusion,

$$\boxed{0,\ -1 \text{ et } -2 \text{ sont des racines de } P.}$$

3. Soit $P \in F$. Par la question précédente, puisque 0, -1, -2 sont trois racines distinctes de P, alors $X\,(X+1)\,(X+2)$ divise P : il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = X\,(X+1)\,(X+2)\,Q.$$

   Or $P \in F \subseteq \mathbb{R}_4[X]$. Donc $\deg(Q) \leqslant 1$. Ainsi, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Q = aX + b$ i.e.

$$\begin{aligned}P &= X\,(X+1)\,(X+2)\,(aX+b)\\ &= bX\,(X+1)\,(X+2) + aX^2\,(X+1)\,(X+2)\,.\end{aligned}$$

   Donc $P \in \operatorname{Vect}\big(X\,(X+1)\,(X+2)\,, X^2\,(X+1)\,(X+2)\big)$. Ceci étant vrai pour $P \in F$ quelconque, on en conclut que

$$\boxed{F \subseteq \operatorname{Vect}\Big(X\,(X+1)\,(X+2)\,, X^2\,(X+1)\,(X+2)\Big)\,.}$$

4. Soit $P \in \operatorname{Vect}\big(X\,(X+1)\,(X+2)\,, X^2\,(X+1)\,(X+2)\big)$. Alors, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$P = aX\,(X+1)\,(X+2) + bX^2\,(X+1)\,(X+2) = (a + bX)\,X\,(X+1)\,(X+2)\,.$$

Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& (X+3)\,P = XP\,(X+1) \\
\Leftrightarrow\quad & (a+bX)\,X\,(X+1)\,(X+2)\,(X+3) = X\,(a+bX+b)\,(X+1)\,(X+2)\,(X+3) \\
\Leftrightarrow\quad & a+bX = a+b+bX \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = b \\
\Leftrightarrow\quad & P = aX\,(X+1)\,(X+2) \\
\Leftrightarrow\quad & P \in \operatorname{Vect}\left(X\,(X+1)\,(X+2)\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$F = \operatorname{Vect}\left(X\,(X+1)\,(X+2)\right) = \operatorname{Vect}\left(\mathscr{B}_F\right).$$

Ainsi, $\mathscr{B}_F$ engendre F. De plus, $\mathscr{B}_F$ est composée d'un seul vecteur/polynôme non nul, donc $\mathscr{B}_F$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_F = \left(X\,(X+1)\,(X+2)\right) \text{ est une base de } F.}$$

5. Posons $\mathscr{B}_G = \left(1, X, X^2, X^4\right)$ alors $G = \operatorname{Vect}\left(\mathscr{B}_G\right)$ et donc $\mathscr{B}_G$ engendre G. La famille $\mathscr{B}_G$ est une famille de polynômes de degrés distincts. Donc $\mathscr{B}_G$ est libre (ou alors $\mathscr{B}_G$ est libre en tant que sous-famille de $\left(1, X, X^2, X^3, X^4\right)$ qui est libre car base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$). Donc $\mathscr{B}_G$ est une base de G. Posons $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$. Alors,

$$\mathscr{B} = \left(X\,(X+1)\,(X+2), 1, X, X^2, X^4\right).$$

Puisque $\deg\left(X\,(X+1)\,(X+2)\right) = 3$, $\mathscr{B}$ est aussi une famille de polynômes de degrés distincts. Donc $\mathscr{B}$ est libre. Montrons que $\mathscr{B}$ engendre $\mathbb{R}_4[X]$. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vect}\left(\mathscr{B}\right) &= \operatorname{Vect}\left(X\,(X+1)\,(X+2), 1, X, X^2, X^4\right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(X^3+3X^2+2X, 1, X, X^2, X^4\right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(X^3, 1, X, X^2, X^4\right) && C_1 \leftarrow C_1 - 3C_3 - 2C_4 \\
&= \operatorname{Vect}\left(X^2, 1, X, X^3, X^4\right) && C_1 \leftrightarrow C_4 \\
&= \operatorname{Vect}\left(X, 1, X^2, X^3, X^4\right) && C_1 \leftrightarrow C_3 \\
&= \operatorname{Vect}\left(1, X, X^2, X^3, X^4\right) && C_1 \leftrightarrow C_2 \\
&= \mathbb{R}_4[X] && \text{car on reconnait la base canonique.}
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est génératrice. Or $\mathscr{B}$ est libre. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$. On a donc

- $\mathscr{B}_F$ base de F,
- $\mathscr{B}_G$ base de G,
- $\mathscr{B} = \left(\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G\right)$ base de $\mathbb{R}_4[X]$.

Conclusion, par le théorème de la base adaptée :

$$\boxed{G = \operatorname{Vect}\left(1, X, X^2, X^4\right) \text{ est un supplémentaire à } F \text{ dans } \mathbb{R}_4[X].}$$

Il est possible de montrer que $\tilde{F} = \{\,P \in \mathbb{R}[X] \mid (X+3)\,P = XP\,(X+1)\,\}$ est toujours égal à F même si on ne suppose pas le degré plus petit que 4 : autrement dit l'équation $(X+3)\,P = XP\,(X+1)$ n'admet pas d'autres solutions dans $\mathbb{R}[X]$ que les $\lambda\,X\,(X+1)\,(X+2)$.