Exercice 4 : Révisions Hiver

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\left(1+\sqrt{\frac{n+a}{n}} - n\arctan\frac{1}{n}\right)$

$n\arctan\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ ✓

$\sqrt{\frac{n+a}{n}} = \sqrt{1+\frac{a}{n}} = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{1/2}$ ✓ car $n \neq 0$

Posons $u = \frac{a}{n}$, $u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ✓

On sait que $(1+u)^{1/2} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}u^2 + o(u^2)$ OK

$u^2 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a^2}{n^2}$

$o(u^2) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\Longrightarrow \left(1+\frac{a}{n}\right)^{1/2} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{a}{2n} - \frac{a^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ✓

$\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$n\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ OK

$1+\sqrt{1+\frac{a}{n}} - n\arctan\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \cancel{1+}1 + \frac{a}{2n} - \frac{a^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$-1 + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ✓

$\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{a}{2n} + \frac{8-3a^2}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ✓

Posons $v = \frac{a}{2n} - \frac{8-3a^2}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $v \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ OK

On sait que $\ln(1+v) \underset{v\to 0}{=} v - \frac{v^2}{2} + o(v^2)$ ✓

$$v^2 \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{a}{2n} + \frac{8-3a^2}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{a}{2n} + \frac{8-3a^2}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{a^2}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{a^2}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$ ✓

$o(v^2) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$\ln(1+v) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{2n} + \frac{8-3a^2}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{a^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{2n} + \frac{8-6a^2}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$ Bien

* Si $a = 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^2}$ ✓

$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{1}{3n^2} \leq \frac{1}{n^2}\right)$

Or, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{3n^2}$ converge comme série de Riemann d'exposant $\alpha = 2$ oui

Donc, par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum_{n\in} u_n$ converge

Il manque le théorème sur les équivalents !

* Si $a \neq 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{2n}$ ✓

Trop rapide

On reconnait la série harmonique, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge

$$\boxed{\text{Conclusion : } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \begin{cases} \text{converge si } a = 0 \\ \text{diverge si } a \neq 0 \end{cases}}$$

Gui