Correction de l'exercice Hiver 04
Analyse asymptotique

Solution de l'exercice 1

1. On a les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{n+a}{n}} &\underset{n\to+\infty}{=} \left(1+\frac{a}{n}\right)^{1/2} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{a}{2n}+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}\frac{a^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{a}{2n}-\frac{a^2}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
n\arctan\left(\frac{1}{n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Par différence,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{n+a}{n}}-n\arctan\left(\frac{1}{n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{a}{2n}-\frac{a^2}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{2n}+\frac{8-3a^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Posons $u \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{2n}+\frac{8-3a^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On a les points suivantes :

- $u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Puis,

$$u^2 \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{a}{2n}+\frac{8-3a^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{a}{2n}+\frac{8-3a^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a^2}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- Enfin,

$$o\left(u^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{a^2}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or $\ln(1+u) \underset{u\to0}{=} u-\frac{u^2}{2}+o\left(u^2\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{=} u-\frac{u^2}{2}+o\left(u^2\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \begin{array}{lll} \frac{a}{2n} & +\frac{8-3a^2}{24n^2} & +o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ & -\frac{a^2}{8n^2} & +o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ & & +o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{array} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{2n}+\frac{8-6a^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{2n}+\frac{4-3a^2}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Premier cas, si $a>0$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{2n}$.

Second cas, si $a = 0$. Alors, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{4}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^2}$.

Conclusion,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{a}{2n} & \text{si } a > 0 \\ \frac{1}{3n^2} & \text{si } a = 0. \end{cases}}$$

2. Par la question précédente, si $a > 0$, alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{2n}.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{2n} > 0$. Enfin, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a}{2n}$ diverge en tant que série harmonique ou de Riemann d'exposant $\alpha = 1$. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ diverge.}$$

Second cas, si $a = 0$, alors, toujours par la question précédente,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^2}.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{3n^2} > 0$. Enfin, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{3n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \begin{cases} \text{diverge} & \text{si } a > 0 \\ \text{converge} & \text{si } a = 0. \end{cases}}$$