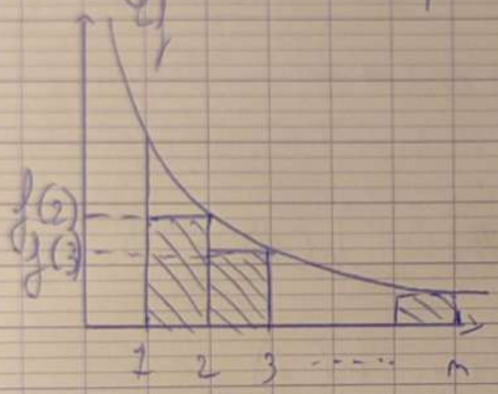
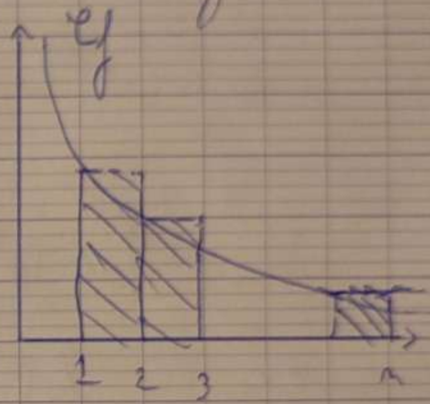
Alexandre. Exo révisions Hiver n° 5 :

Exo 1 : Montrons que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge.

Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=\frac{1}{x}$.

f est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par le théorème de comparaison série-intégrale : oui





$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(t)\,dt$$ oui !

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_1^{n+1} f(t)\,dt,$$ a priori

puis $\to \geq \int_1^n f(t)\,dt$

On a donc

$$\forall n\geq 2,\quad \int_1^n f(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) = S_n = 1+\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq 1+\int_1^n f(t)\,dt$$

Or, $\int_1^n f(t)\,dt = \int_1^n \frac{1}{t}\,dt = \ln(n)$. ✓

Oui !

donc $\forall n\geq 2,\quad \ln(n) \leq S_n \leq 1+\ln(n)$ (★)

Cette relation est encore vraie au rang $n=1$. ✓

Par passage à la limite, on obtient que

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$, ~~l~~ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$,

En quoi est-ce utile ?

Donc la $\boxed{\text{série } \sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \text{ diverge.}}$

Bien.

Reprenons (☆) et montrons que $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est équivalent à $\ln(n)$ lorsque $n \to +\infty$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, (☆) : $\ln(n) \leq S_n \leq \ln(n) + 1$

Or, $\ln(n) + 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$

donc, lorsque $n \to +\infty$:

$$\ln(n) \leq S_n \leq \ln(n).$$

Mal rédigé, cite le théorème d'encadrement pour les équivalents.

Conclusion : par le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)}$$

TB.

Exercice 2 :

Montrons que $f(E) = f(A \cup B)$.

$f(E) = (E \cap A, E \cap B) = (A, B)$ ✓

De même on a

$f(A \cup B) = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B) = (A, B)$ oui

donc $f(E) = f(A \cup B)$ ✓

Désormais, si on suppose f injective, on a

$$f(E) = f(A \cup B)$$

$\Rightarrow$ $E = A \cup B$ car f est injective

$\boxed{\text{Conclusion : Si } f \text{ est injective, alors } A \cup B = E}$

Bien.