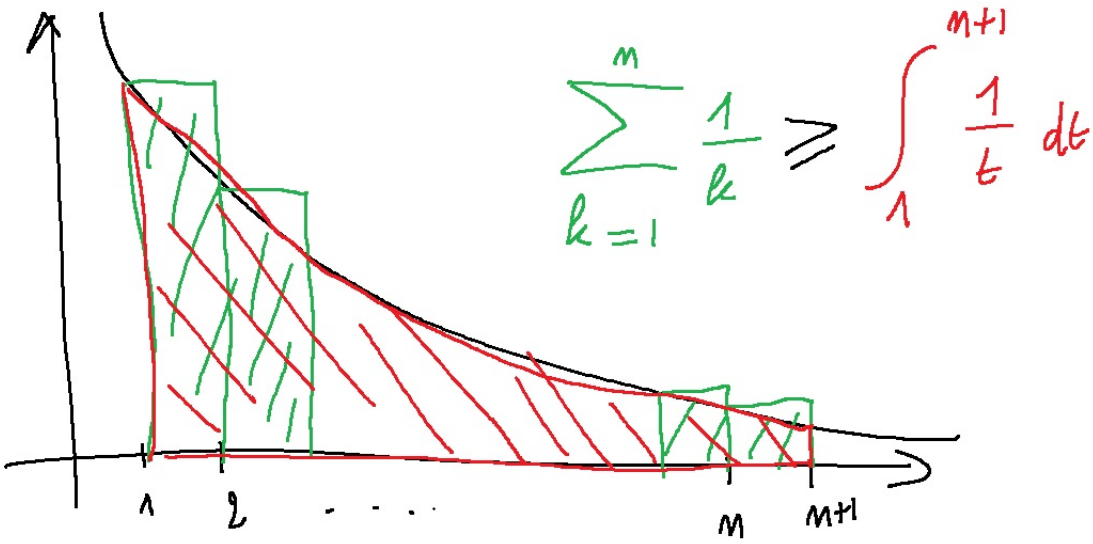
Correction de l'exercice Hiver 05
Ensembles et applications

Solution de l'exercice 1 Posons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{t} \end{array}$. La fonction f est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par le théorème de comparaison série-intégrale (un dessin !)



on a, d'une part,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_{t=1}^{t=n+1} = \ln(n+1).$$

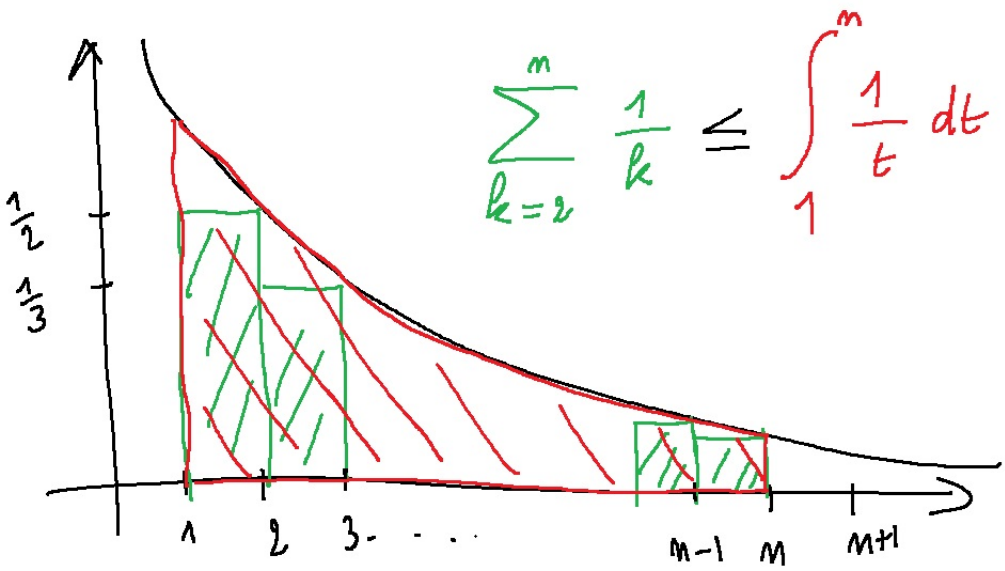
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$. Donc par le théorème de minoration, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Et donc

$$\boxed{\text{la série harmonique } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \text{ diverge.}}$$

D'autre part,



on a pour $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_2^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 1 + [\ln(t)]_{t=2}^{t=n} = \ln(n) - \ln(2) + 1.$$

Ainsi,

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) - \ln(2) + 1.$$

Or

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \qquad\qquad \ln(n) - \ln(2) + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

Donc par le théorème d'encadrement des équivalents, on conclut que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Solution de l'exercice 2 Supposons f injective. Alors, pour tout $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$, on a

$$f(X) = f(Y) \;\Rightarrow\; X = Y.$$

On veut montrer que $X = A \cup B$ est égal à $Y = E$. Calculons donc leurs images. On a d'une part,

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B) = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B).$$

Or $A \subseteq A \cup B$. Donc $(A \cup B) \cap A = A$. De même, $(A \cup B) \cap B = B$. Donc

$$f(X) = (A, B).$$

D'autre part, puisque $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$,

$$f(Y) = (E \cap A, E \cap B) = (A, B).$$

Par conséquent,

$$f(X) = (A, B) = f(Y).$$

Or f est injective donc, $A \cup B = X = Y = E$. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ injective} \qquad \Rightarrow \qquad A \cup B = E.}$$