Exercice Hiver 06
Suites

Exercice 1 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\sqrt{n}\sin(n)}{n^2+2n+3}$.

Exercice 2 On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $0 < u_0 < v_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existent et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Etudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. On note u la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et v la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
5. En déduire les valeurs de u et v.