Correction de l'exercice Hiver 06
Suites

Solution de l'exercice 1 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\sqrt{n}\sin(n)}{n^2+2n+3}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^2 + 2n + 3 \geqslant n^2.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant |u_n| = \frac{\sqrt{n}\,|\sin(n)|}{n^2+2n+3} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Or $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \text{ converge.}$$

Autrement dit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: « u_n et v_n existent et sont strictement positifs » . Procédons par récurrence.
   Initialisation. Si $n = 0$, alors u_0 et v_0 existent et sont strictement positifs. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors, u_n et v_n existent et sont strictement positifs. Donc $u_n + v_n > 0$ et ainsi, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n}$ existe et de même $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n+v_n}$ existe. De plus comme $u_n^2 > 0$, $u_n + v_n > 0$ et $v_n^2 > 0$, on en déduit également que $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

   $$\boxed{\text{Les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ existent et que pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0 \text{ et } v_n > 0.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n > 0$ et donc $u_n + v_n > u_n$. Donc $\frac{1}{u_n+v_n} < \frac{1}{u_n}$. Puisque $u_n^2 > 0$, on en déduit que $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n} < \frac{u_n^2}{u_n} = u_n$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Par symétrie des hypothèses, on démontre de même que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Conclusion,

   $$\boxed{\text{Les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont strictement décroissantes.}}$$

3. On a vu que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Donc par le théorème de convergence monotone, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De même pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Conclusion,

   $$\boxed{\text{Les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent.}}$$

   On note u la limite de u et v la limite de v.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} - \frac{v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{v_n^2 - u_n^2}{u_n + v_n} = \frac{(v_n - u_n)(v_n + u_n)}{u_n + v_n} = v_n - u_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante.}}$$

5. Par la question précédente, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n - u_n = v_0 - u_0.$$

Donc par passage à la limite,

$$v - u = v_0 - u_0.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ donc $u \geqslant 0$ et donc $v = v_0 - u_0 + u \geqslant v_0 - u_0 > 0$. Dès lors, $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u + v \geqslant v > 0$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n}$. Donc par passage à la limite,

$$\begin{aligned} u = \frac{u^2}{u+v} \quad &\Leftrightarrow \quad u^2 + uv = u^2 && \text{car } u + v > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad uv = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u = 0 && \text{car } v > 0. \end{aligned}$$

Par suite, puisque $v = v_0 - u_0 + u$, on en déduit que $v = v_0 - u_0$. Conclusion,

$$\boxed{u = 0 \qquad \text{et} \qquad v = v_0 - u_0.}$$