Correction de l'exercice Hiver 07
Espaces vectoriels

Solution de l'exercice 1 On applique la règle du $n^{3/2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$n^{3/2}u_n = n^{3/2}\frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{par croissance comparée.}$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$n^{3/2}u_n \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad u_n \leqslant \frac{1}{n^{3/2}} \qquad \text{car } n^{3/2} > 0.$$

De plus, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2} \geqslant 0$. Donc

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$. Conclusion, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^2} \text{ converge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. On observe les points suivants :
   - $F \subseteq E$ par définition.
   - Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = O_2$. Alors $a = b = c = d = 0_{\mathbb{R}}$. Donc $a - b + c = 0$ et $2a - 3b + 2d = 0$. Donc $O_2 \in F$.
   - Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\left(M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) \in F^2$. Alors,

     $$\begin{cases} a_1 - b_1 + c_1 = a_2 - b_2 + c_2 = 0 \\ 2a_1 - 3b_1 + 2d_1 = 2a_2 - 3b_2 + 2d_2 = 0. \end{cases}$$

     Posons $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$. Alors,

     $$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 & \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \end{pmatrix}.$$

     Et on observe que

     $$\begin{cases} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 - (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 & = \lambda_1 \underbrace{(a_1 - b_1 + c_1)}_{=0 \text{ car } M_1\in F} + \lambda_2 \underbrace{(a_2 - b_2 + c_2)}_{=0 \text{ car } M_2\in F} = 0 \\ 2(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) - 3(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) + 2(\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2) & = \lambda_1 \underbrace{(2a_1 - 3b_1 + 2d_1)}_{=0 \text{ car } M_1\in F} + \lambda_2 \underbrace{(2a_2 - 3b_2 + 2d_2)}_{=0 \text{ car } M_2\in F} = 0 \end{cases}$$

     Donc $M \in F$ et F est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion,

   $$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - b + c = 0 \\ 2a - 3b + 2d = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - b + c = 0 \\ -b - 2c + 2d = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = b - c = 2d - 2c - c = 2d - 3c \\ b = 2d - 2c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 2d - 3c & 2d - 2c \\ c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc

$$F = \mathrm{Vect} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)}_{=\mathscr{B}_F}$$

La famille $\mathscr{B}_F$ engendre donc F. De plus $\mathscr{B}_F$ est constituée de deux matrices non colinéaires donc $\mathscr{B}_F$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_F = \left(\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } F.}$$

3. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}
F &= \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \qquad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\
&= \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right) \qquad C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 \\
&= \mathrm{Vect} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} \right)}_{=\mathscr{B}'_F} \qquad \begin{matrix} C_1 \leftarrow -C_1 \\ C_2 \leftarrow \frac{1}{2} C_2 \end{matrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{B}'_F = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} \right)$ engendre F et de plus $\mathscr{B}'_F$ est composée de deux matrices non colinéaires. Donc $\mathscr{B}'_F$ est libre. Ainsi, $\mathscr{B}'_F$ est aussi une base de F. On note qu'il manque des pivots dans les coordonnées 3 et 4 dans la base canonique. Posons $\mathscr{B}_G = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. En tant que sous-famille de la base canonique $\mathscr{B}_G$ est libre. Posons $G = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_G)$. Donc $\mathscr{B}_G$ est libre et engendre G donc est une base de G. Posons enfin $\mathscr{B} = (\mathscr{B}'_F, \mathscr{B}_G)$. Montrons que $\mathscr{B}$ est une base de E i.e. est libre et génératrice dans E.

Libre : Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = O_2.$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -a + b + c & -a + \frac{3b}{2} + d \end{pmatrix} = O_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ -a + b + c = 0 \\ -a + \frac{3b}{2} + d = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = d = 0.$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre.

Génératrice : les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}\right) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 + C_3 + C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 - \frac{3}{2}C_4 \end{array} \\
&= \mathscr{M}_2\left(\mathbb{R}\right) && \text{car on reconnait la base canonique de } \mathscr{M}_2\left(\mathbb{R}\right)
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est génératrice dans $\mathscr{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$. Or $\mathscr{B}$ est libre donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$. Ainsi,

- $\mathscr{B}'_F$ est une base de F
- $\mathscr{B}_G$ est une base de G
- $\mathscr{B} = (\mathscr{B}'_F, \mathscr{B}_G)$ est une base de $\mathscr{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$.

Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathscr{M}_2\left(\mathbb{R}\right).}$$