Exo 1 : On a $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2}{n!}$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = \frac{n^2}{n!}$

$U_0 = 0$ ✓ $\qquad U_5 \neq 0,21 = \frac{5}{24}$

$U_1 = 1$ ✓

$U_2 = 2$ ✓

$U_3 = 1,5 = \frac{3}{2}$

$U_4 \neq 0,67 = \frac{2}{3}$

Des exemples ne sont pas une preuve !!!

On observe que pour tout $n \geq 2$, $U_n \geq U_{n+1}$ donc ~~$\forall n \geq 2$~~ (U_n) décroissante. $n \geq 2$

De plus, $\frac{n^2}{n!} \geq 0$ donc U_n est minorée par 0.

Donc par le théorème de convergence monotone, $\forall n \geq 2$, U_n tend vers 0.

La convergence monotone garantit juste l'existence de la limite pas que cette limite vaut 0 !! Il faut juste invoquer de la croissance comparée, cf corrigé.

Somme totale :

Convergence de la SERIE ?

$$U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 = 5.38$$

car $\forall n > 5$, on peut donner un équivalent :

$$\forall n > 5, \quad \frac{n^2}{n!} \underset{n \to +\infty}{\sim} 0$$

CENSURÉ !!!

C'est de la provoque ?

100 pompes !!

Exo2 : 1) Soit $f : x \mapsto \frac{x^2}{x+1} \arctan(x)$

$$\frac{x^2}{x+1} \arctan(x) = x^2 \times \frac{1}{1+x} \times \arctan(x)$$

NON

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 - x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$\arctan(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$ ✓

$$\frac{1}{1+x} \times \arctan(x) \underset{x \to 0}{=} \left(1 - x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$\underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$- x^2 + o(x^3)$$
$$+ x^3 + o(x^3)$$ ✓
$$+ o(x^3)$$

$$\underset{x \to 0}{=} x - x^2 + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$ ✓

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} x^2\left(x - x^2 + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} x^3 + o(x^3)$$ ✓ $\begin{cases} x^3 > 0 & \text{si } x > 0 \\ x^3 < 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

car le signe de o (x^3) est inconnu

Donc f est au dessus de sa tangente en 0^+ et en dessous de sa tangente en 0^-. Oui

Quelle est cette tangente ?

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + o(x^3) = +\infty$

Non, un DL en 0 ne donne pas d'information en +infini

On calcule

A revoir.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 + o(x^3)}{x} = x^2 + o(x^2)$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc la courbe $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction asymptotique (Oy) en $+\infty$.

Sachant que lorsque $x > 0$, $f(x) > 0$, la fonction f est donc au dessus de son asymptote en $+\infty$.