Correction de l'exercice Hiver 08
Analyse asymptotique

Solution de l'exercice 1 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n^2}{n!}$. Procédons à la règle du n^2. On a

$$n^2 u_n = \frac{n^4}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{par croissance comparée.}$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$n^2 u_n \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad u_n \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \text{car } n^2 > 0.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. Ainsi,

$$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en conclut que

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2}{n!} \text{ converge.}}$$

Calculons sa somme totale. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{k!}$. Soit $n \geqslant 2$. On a

$$S_n = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k-1)!} \qquad \text{car } n \geqslant 1$$

Attention à bien extraire $k = 0$ avant de simplifier !!!
Posons $\tilde{k} = k - 1$. Alors,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{\tilde{k}=0}^{n-1} \frac{\tilde{k}+1}{\tilde{k}!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \qquad \text{car } n \geqslant 2 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \qquad \text{par le glissement d'indice } \tilde{k} = k-1.
\end{aligned}$$

On reconnait alors deux sommes exponentielle de paramètre $z = 1$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{k!} = \mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^1 = 2\,\mathrm{e}\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{k!} = 2\,\mathrm{e}\,.}$$

Solution de l'exercice 2

1. **Au voisinage de 0.** On sait que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et que $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$. Donc par produit,

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3.$$

Autrement dit,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x^3 + o\left(x^3\right).$$

Donc la courbe représentative de f admet pour tangente en 0 la droite d'équation

$$\boxed{y = 0.}$$

De plus $f(x) - 0 \underset{x\to 0}{\sim} x^3$. et deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré. Donc

$$\boxed{\text{La courbe de } f \text{ est en dessous de sa tangente en } 0^- \text{ et au dessus en } 0^+.}$$

2. **Au voisinage de $+\infty$.** On sait que pour tout $x > 0$,

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Posons $u = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Puisque $\arctan(u) \underset{u\to 0}{=} u + o\left(u^2\right)$, on en déduit que

$$\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

D'autre part,

$$\frac{x^2}{1+x} = \frac{x^2}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x - 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Alors, par produit,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} \left(x - 1 + \tfrac{1}{x} + o\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{x} + o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \begin{array}{llll} \frac{\pi}{2}x & -1 & & +o\left(\frac{1}{x}\right) \\ & -\frac{\pi}{2} & +\frac{1}{x} & +o\left(\frac{1}{x}\right) \\ & & +\frac{\pi}{2x} & +o\left(\frac{1}{x}\right) \\ & & & +o\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \tfrac{\pi}{2}x - \tfrac{\pi}{2} - 1 + \left(1 + \tfrac{\pi}{2}\right)\tfrac{1}{x} + o\left(\tfrac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion, la courbe représentative admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation

$$\boxed{y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1.}$$

De plus,

$$f(x) - \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{x} > 0$$

Or deux équivalents ont même signe au voisinage considéré. Donc

$$\boxed{\text{Au voisinage de } +\infty \text{ la courbe de } f \text{ est au-dessus de son asymptote.}}$$