Correction de l'exercice Hiver 09
Ensembles et applications

Solution de l'exercice 1 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+3)!} = \frac{1}{(n+3)!}\sum_{k=1}^{n} k!$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On observe que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $k! \leqslant n!$. Ainsi,

$$u_n \leqslant \frac{1}{(n+3)!}\sum_{k=1}^{n} n! = \frac{n!}{(n+3)!}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}n \leqslant \frac{1}{(n+2)(n+3)} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+3)!} \text{ converge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. On suppose que $A \cup B = E$. Soit $(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$. Montrons que $X = Y$. Soit $x \in X \subseteq E = A \cup B$. Alors $x \in A \cup B$. Premier cas, $x \in A$. Puisque $x \in X$ on a alors $x \in X \cap A$. Or $X \cap A = Y \cap A \subseteq Y$. Donc $x \in Y$.
   Second cas, $x \in B$. De même, $x \in X \cap B = Y \cap B \subseteq Y$. Donc $x \in Y$.
   Dans tous les cas, $x \in Y$. Donc $X \subseteq Y$. Par symétrie des hypothèses sur X et Y, on démontre de même que $Y \subseteq X$. Conclusion,
   $$\boxed{X = Y.}$$

2. Soit $(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2$. Alors,
   $$f(X) = f(Y) \qquad \text{i.e.} \qquad (X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B).$$
   Ainsi, $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$. Donc par la question précédente, $X = Y$. Ainsi, pour tout $(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2$,
   $$f(X) = f(Y) \;\Rightarrow\; X = Y.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{f \text{ est injective.}}$$