Exercice Hiver 10
Suites

Exercice 1 Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n}\right)$.

Exercice 2 On considère la fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in I_n$ tel que $f(x_n) = 0$.
2. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Préciser la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$.
5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_n - n\pi$.
   (a) Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(y_n)$.
   (c) En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   (d) En déduire que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
6. Conclure que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$.