Correction de l'exercice Hiver 10
Suites

Solution de l'exercice 1 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n}\right)$. On a les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n} &= \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}-1\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{4n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n} = 0$. Par composition,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

Donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge grossièrement. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n}\right) \text{ diverge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est définie et même dérivable sur I_n et pour tout $x \in I_n$,

$$f'(x) = 1+\tan^2(x)-1 = \tan^2(x).$$

Donc pour tout $x \in I_n \setminus \{n\pi\}$, $f'(x) > 0$ et $f(n\pi) = 0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur I_n. De plus

$$\lim_{\substack{x\to n\pi-\frac{\pi}{2}\\ x>n\pi-\frac{\pi}{2}}} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}\\ x<n\pi+\frac{\pi}{2}}} f(x) = +\infty.$$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$n\pi-\frac{\pi}{2}$	$n\pi+\frac{\pi}{2}$
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in I_n$ et donc $x_n > n\pi - \frac{\pi}{2}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n\pi - \dfrac{\pi}{2} = +\infty$. Donc par le théorème de minoration, on en déduit que

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty : \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in I_n$ et $x_{n+1} \in I_{n+1}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$x_n < n\pi + \frac{\pi}{2} = (n+1)\pi - \frac{\pi}{2} < x_{n+1}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in I_n$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}.$$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en divisant par $n\pi > 0$,
$$1 - \frac{1}{2n} < \frac{x_n}{n\pi} < 1 + \frac{1}{2n}.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2n} = 1$. Donc par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$. Autrement dit,
$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi.}$$

5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_n - n\pi$.
   (a) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$ donc
   $$-\frac{\pi}{2} < x_n - n\pi = y_n < \frac{\pi}{2}.$$
   Donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $-\frac{\pi}{2}$ et majorée par $\frac{\pi}{2}$. Conclusion,
   $$\boxed{\text{La suite } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$$
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\begin{aligned} f(y_n) &= f(x_n - n\pi) \\ &= \tan(x_n - n\pi) - (x_n - n\pi) \\ &= \tan(x_n) - x_n + n\pi && \text{car tan } \pi\text{-périodique} \\ &= f(x_n) + n\pi \\ &= 0 + n\pi. \end{aligned}$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(y_n) = n\pi.}$$
   (c) On en déduit de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$f(y_n) = n\pi < (n+1)\pi = f(y_{n+1}).$$
   Or la fonction f est strictement croissante sur I_0 (par la question 1). Donc
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad y_n < y_{n+1}.}$$
   (d) Par les questions précédentes, on a $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante et majorée par $\frac{\pi}{2}$. Donc par le théorème de convergence monotone, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{\pi}{2} < y_n < \frac{\pi}{2}$. Donc par passage à la limite, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y_n \leqslant \frac{\pi}{2}$. Or par la question 5b $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n\pi = +\infty$. Supposons $\ell = -\frac{\pi}{2}$ alors par caractérisation séquentielle de la continuité,
   $$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = -\infty.$$

Contradiction. De même si $\ell \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on aurait par continuité de f,

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = f(\ell) \neq +\infty.$$

Contradiction. Donc $\ell = \frac{\pi}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \frac{\pi}{2}.}$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n = n\pi + y_n$. Or par la question précédente, $y_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} + o(1)$. Conclusion,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).}$$