Correction de l'exercice Hiver 11
Polynômes

Solution de l'exercice 1 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$. Par croissance comparée, on a

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geqslant 2$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(n) \leqslant \sqrt{n}.$$

Dès lors,

$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} = \frac{1}{n} > 0.$$

Or $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge en tant que série harmonique ou de Riemann d'exposant $\alpha = 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on conclut que

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} \text{ diverge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. Par le théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme de degré 1 ou plus admet au moins une racine complexe. On en déduit que tout polynôme est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Donc

$$\boxed{P = X^4 + 12X - 5 \text{ est scindé dans } \mathbb{C}[X].}$$

   On note a, b, c et d ses quatre racines (éventuellement confondues).

2. On donne $a + b = 2$ et $cd = -1$. De plus par les relations racines-coefficients, on a

$$abcd = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = (-1)^4 \frac{-5}{1} = -5 \qquad \text{et} \qquad a+b+c+d = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{0}{1} = 0.$$

   Puisque $cd = -1$ et $abcd = -5$, on en déduit que $ab\,(-1) = -5 \;\Leftrightarrow\; ab = 5$. De même $a+b+c+d = 0$ et $a + b = 2$ donc $2 + c + d = 0 \;\Leftrightarrow\; c + d = -2$. On a donc, d'une part,

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 5. \end{cases}$$

   Autrement dit, (par les relations racines-coefficients à l'ordre 2),

$$a \text{ et } b \text{ sont les racines de } X^2 - 2X + 5.$$

   Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 4 - 20 = -16$. Donc $\delta = 4i$ est UNE racine complexe de Δ. Ainsi,

$$a = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i \quad \text{et} \quad b = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i \quad \text{(ou l'inverse).}$$

   De même, on a

$$\begin{cases} c + d = -2 \\ ab = -1. \end{cases}$$

Autrement dit, (par les relations racines-coefficients à l'ordre 2),

$$c \text{ et } d \text{ sont les racines de } X^2 + 2X - 1.$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 4 + 4 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$. Donc,

$$c = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1 \quad \text{et} \quad d = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -\left(sqrt2 + 1\right) \quad \text{(ou l'inverse).}$$

Conclusion,

$$\boxed{a = 1 + 2i, \quad b = 1 - 2i, \quad c = \sqrt{2} - 1, \quad d = -\left(\sqrt{2} + 1\right).}$$

3. Par la question précédente, dans $\mathbb{C}[X]$, on en déduit directement que

$$\boxed{P = (X - 1 - 2i)(X - 1 + 2i)\left(X - \sqrt{2} + 1\right)\left(X + \sqrt{2} + 1\right).}$$

Pour déterminer la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, il nous suffit alors de rassembler les racines complexes conjuguées :

$$\begin{aligned}
P &= \left(X^2 + (-1 - 2i - 1 + 2i)X - (1 + 2i)(-1 + 2i)\right)\left(X - \sqrt{2} + 1\right)\left(X + \sqrt{2} + 1\right) \\
&= \left(X^2 - 2X - \left((2i)^2 - 1^2\right)\right)\left(X - \sqrt{2} + 1\right)\left(X + \sqrt{2} + 1\right) \\
&= \left(X^2 - 2X + 5\right)\left(X - \sqrt{2} + 1\right)\left(X + \sqrt{2} + 1\right).
\end{aligned}$$

NB : on retrouver bien le polynôme $X^2 - 2X + 5$ qui nous a servi à déterminer a et b.
Conclusion, dans $\mathbb{R}[X]$, on obtient

$$\boxed{P = \left(X^2 - 2X + 5\right)\left(X - \sqrt{2} + 1\right)\left(X + \sqrt{2} + 1\right).}$$

Vérification :

$$\begin{aligned}
P &= \left(X^2 - 2X + 5\right)\left(X^2 + \left(-\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + 1\right)X + \left(-\sqrt{2} + 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)\right) \\
&= \left(X^2 - 2X + 5\right)\left(X^2 + 2X + \left(1^2 - 2\right)\right) \\
&= \left(X^2 - 2X + 5\right)\left(X^2 + 2X - 1\right) \\
&= X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X^3 - 4X^2 + 2X + 5X^2 + 10X - 5 \\
&= X^4 + 12X - 5 \ \textit{OK !}
\end{aligned}$$