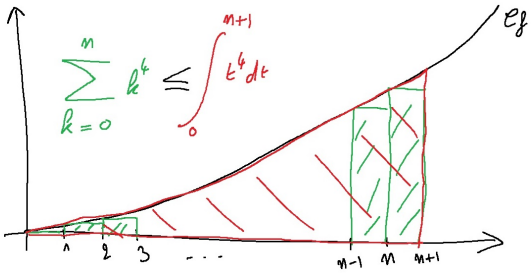
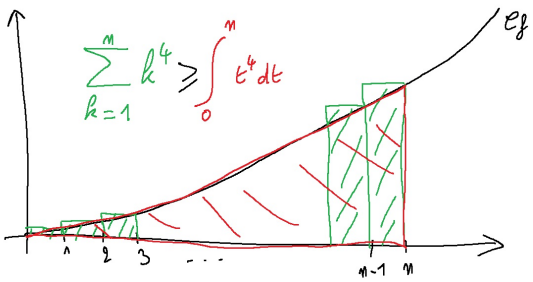
Correction de l'exercice Hiver 12
Continuité, dérivabilité

Solution de l'exercice 1 Puisque $n^4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^4$ diverge grossièrement. Posons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^4 \end{array}$. La fonction f est continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc par le théorème de comparaison série-intégrale (un dessin !), on a pour $n \in \mathbb{N}^*$,





Ainsi, d'une part,

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 \leqslant \int_0^{n+1} t^4 \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^5}{5}\right]_{t=0}^{t=n+1} = \frac{(n+1)^5}{5}.$$

D'autre part,

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 \geqslant \int_0^{n} t^4 \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^5}{5}\right]_{t=0}^{t=n} = \frac{n^5}{5}.$$

D'où,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n^5}{5} \leqslant \sum_{k=0}^{n} k^4 \leqslant \frac{(n+1)^5}{5}.$$

Or $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. Donc par élévation à la puissance,

$$\frac{(n+1)^5}{5} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^5}{5}.$$

Conclusion, par le théorème d'encadrement des équivalents,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^5}{5}.}$$

Solution de l'exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{e}^x - 1)\, x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ \mathrm{e}^x \neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0.$$

   Conclusion, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*.}$$

2. On sait que $\cos(x) \underset{x\to0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ donc $\cos(x) - 1 \underset{x\to0}{=} -\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

D'autre part, $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$ et donc $(\mathrm{e}^x - 1)\,x \underset{x\to 0}{=} (x + o(x))\,x \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. Alors par quotient, on obtient,

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)\,x} \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} \frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Donc,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

Dès lors, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = -\frac{1}{2}$ et la fonction nouvelle fonction prolongée est alors donnée par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{(\mathrm{e}^x-1)x} \text{ si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} \text{ si } x = 0. \end{cases}}$$

3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente. De plus f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet ensemble et dont le dénominateur ne s'annule pas et l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{-\sin(x)\,(\mathrm{e}^x - 1)\,x - (\cos(x) - 1)\,(x\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 1)}{(\mathrm{e}^x - 1)^2\,x^2}.$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D(x) = -\sin(x)\,(\mathrm{e}^x - 1)\,x - (\cos(x) - 1)\,(x\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 1)$. Avec les développements limités usuels, on a

$$\begin{aligned}
D(x) &\underset{x\to 0}{=} -\left(x + o\left(x^2\right)\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) - 1\right)x \\
&\qquad - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) - 1\right)\left(x\,(1 + x + o(x)) + 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) - 1\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\left(x + o\left(x^2\right)\right)\left(x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)x \\
&\qquad - \left(-\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)\left(x + x^2 + o\left(x^2\right) + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\left(x^2 + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right)\right)x - \left(-\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)\left(2x + \frac{3x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -x^3 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right) - \left(-x^3 - \frac{3x^4}{4} + o\left(x^4\right) + o\left(x^4\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$D(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{4}.$$

D'autre part, on a

$$(\mathrm{e}^x - 1)^2\,x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2 x^2 = x^4.$$

Donc par quotient,

$$f'(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} \frac{x^4/4}{x^4} = \frac{1}{4}.$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)$ existe et vaut $1/4$.

Donc par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f est $\mathscr{C}^1$ en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ et de plus $f'(0) = \frac{1}{4}$. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$