Soit $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x+2}\right)$

Recherchons un développement limité en 0 à l'ordre 3 de f

$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ oui

$\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{2(1+\frac{x}{2})}$ V. Posons $h = \dfrac{x}{2}$

$\dfrac{1}{2(1+h)} \underset{h\to 0}{=} \dfrac{1}{2}\left(1 - h + h^2 - h^3 + o(h^3)\right)$ oui

$\underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{16} + o(x^3)$ V

$\dfrac{\ln(1+x)}{2+x} \underset{x\to 0}{=} \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{16} + o(x^3)\right)$

Faux

$\underset{x\to 0}{=} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ Non justifié!

. Posons $u = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

. $u \underset{x\to 0}{\to} 0$

. $\arctan(u) \underset{u\to 0}{=} u - \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$ V

. $u^3 = \dfrac{x^3}{8} + o(x^3)$ Non justifié!

. $o(u^3) = o(x^3)$

Conclusion : $f(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) - \dfrac{x^3}{24} + o(x^3)$ $+o(x^3)$

$$\boxed{\underset{x\to 0}{=} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{7x^3}{24} + o(x^3)}$$

Exercice 2 :

Soit $I =]-1, +\infty[$, (E) : $\forall x \in I, y'(x) + \frac{2x}{1+x} y(x) = (x+1)^2 e^{x}$

Soit (E_0) l'équation homogène associée : $\forall x \in I$,
$y'(x) + \frac{2x}{1+x} y(x) = 0$

$x \mapsto \frac{2x}{1+x}$ est continue sur I donc admet des primitives sur I dont l'une est donnée par le théorème fondamental de l'analyse par $\forall t \in I$: oui !

$$F(t) = \int_1^t \frac{2x}{1+x}\,dx = \int_1^t \frac{2(x+1)-2}{1+x}\,dx \quad \text{V}$$

0K ou 0.

$$= 2\left(\int_1^t 1\,dx - \int_1^t \frac{1}{1+x}\,dx\right) \quad \text{V}$$

$$= 2\left([x]_{x=1}^{x=t} - [\ln(|1+x|)]_{x=1}^{x=t}\right) \quad \text{V}$$

$$\boxed{F(t) = 2t - 2 - 2\ln(|t+1|) + \ln(2)} \quad \text{oui}$$

Une primitive est donc donnée par $x \mapsto 2(x - \ln(|1+x|))$
Ainsi, l'ensemble des solutions homogènes s'écrit

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto k e^{2\ln(|1+x|) - 2x} \end{array} \middle| k \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{oui}$$

$$\boxed{= \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto k(x+1)^2 e^{-2x} \end{array} \middle| k \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x+1)^2 e^{-2x} \end{array} \right)} \quad \text{V}$$

Bien

Soit y une fonction dérivable sur I V
Soit $y_0 : x \mapsto (x+1)^2 e^{-2x}$ V
oui
Soit $\lambda : x \mapsto \frac{y(x)}{y_0(x)}$ car, $\forall x \in I$, $y_0(x) \neq 0$. On constate que λ est dérivable sur I comme quotient de fonctions étant

bien

$$y \text{ est solution de } (E) \iff \overset{\forall x \in I}{\lambda'(x) y_0(x)} + \lambda(x)\underbrace{\left(y_0'(x) + \frac{2x}{1+x} y(x)\right)}_{=0 \text{ car } y_0 \in S_0'} = (1+x)^3 e^{x}$$ ✓

$$\iff \forall x \in I, \lambda'(x) y_0(x) = (1+x)^3 e^{x}$$ ✓

$$\iff \forall x \in I, \lambda'(x) = (1+x) e^{3x}$$ ✓

Soit $f : x \mapsto (1+x)e^{3x}$. ✓
f est continue sur I comme produit de fonctions continues. f admet donc des primitives sur I dont l'une est donnée par le théorème fondamental de l'analyse par $\forall t \in I$:

$$F(t) = \int_1^t e^{3x}(1+x)\,dx$$ ✓

ok au 0.

$$\forall x \in I, \text{ posons : } \begin{cases} u(x) = \frac{1}{3} e^{3x} \\ v(x) = 1+x \end{cases}$$ ✓

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I, \begin{cases} u'(x) = \cancel{\frac{1}{3}} e^{3x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ ✓

oui

Donc, par intégration par parties

$$\int_1^t e^{3x}(1+x)\,dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x}(1+x)\right]_{x=1}^{x=t} - \int_1^t \frac{1}{3} e^{3x}\,dx$$ oui

$$= \left[\frac{1}{3}e^{3x}(1+x)\right]_{x=1}^{x=t} - \left[\frac{1}{9}e^{3x}\right]_{x=1}^{x=t}$$ ✓

$$= \frac{1}{3}e^{3t}(1+t) - \frac{2}{3}e^{3} - \frac{1}{9}e^{3t} + \frac{e^3}{9}$$

$$\boxed{F(t) = \frac{1}{3}e^{3t}(1+t) - \frac{1}{9}e^{3t} - \frac{7}{9}e^{3}}$$

Ainsi,

Bien !

$$y \text{ solution de } (E) \iff \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \lambda(x) = \frac{e^{3x}}{3}(1+x) - \frac{e^{3x}}{9} + k$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, y(x) = \frac{e^{x}}{3}(x+1)^3 - \frac{e^{x}}{9}(1+x)^2 + k(1+x)^2 e^{-2x}$$

Donc,

$$\boxed{S' = \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^{x}}{3}(x+1)^3 - \frac{e^{x}}{9}(1+x)^2 + k(1+x)e^{-2x} \end{array} \middle| \, k \in \mathbb{R} \right\}}$$

TB !