Correction de l'exercice Noël 01
Equations différentielles

Solution de l'exercice 1 On sait que

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

Puisque ce développement commence par un x, on anticipe l'ordre du dénominateur où il suffira d'aller à l'ordre 2.
D'autre part, on a

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right).$$

Par produit,

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{2+x} &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{x}{4} + \tfrac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{llll} \frac{x}{2} & -\frac{x^2}{4} & +\frac{x^3}{8} & +o\left(x^3\right) \\ & -\frac{x^2}{4} & +\frac{x^3}{8} & +o\left(x^3\right) \\ & & +\frac{x^3}{6} & +o\left(x^3\right) \\ & & & +o\left(x^3\right) \end{array} \\
&\underset{x\to 0}{=} \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{3+3+4}{24}x^3 \\
&\underset{x\to 0}{=} \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{5}{12}x^3.
\end{aligned}$$

On sait que $\arctan(u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)$. Posons $u(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{12}x^3 + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors,

- on a

$$\begin{aligned}
u^2(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(\tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{5}{12}x^3 + o\left(x^3\right)\right)\left(\tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{5}{12}x^3 + o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{lll} \frac{x^2}{4} & -\frac{x^3}{4} & +o\left(x^3\right) \\ & -\frac{x^3}{4} & +o\left(x^3\right) \\ & & +o\left(x^3\right) \end{array} \\
&\underset{x\to 0}{=} \tfrac{x^2}{4} - \tfrac{x^3}{2} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

- On observe que $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$ donc par élévation à la puissance $u^3(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{8}$ i.e.

$$u^3(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right).$$

- Enfin, $o\left(u^3(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \arctan(u(x)) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{12}x^3 + o\left(x^3\right) - \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{9}{24}x^3 + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^3 + o\left(x^3\right).}$$

Solution de l'exercice 2 Les fonctions $a : x \mapsto \frac{2x}{1+x}$ et $b : x \mapsto (1+x)^3 \,\mathrm{e}^x$ sont continues sur $I =]1;+\infty[$. Donc l'équation (E) admet des solutions. Puisque a est continue, elle admet des primitives sur cet intervalle. Puisque

$$\forall x \in I, \qquad a(x) = \frac{2x}{1+x} = \frac{2(x+1)-2}{1+x} = 2 - \frac{2}{1+x},$$

on en déduit que l'une des primitives de a est donnée sur I par

$$A : x \mapsto 2x - 2\ln(|1+x|) = 2x - 2\ln(1+x).$$

Ainsi

$$\forall x \in I, \qquad \mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{-2x+2\ln(1+x)} = (1+x)^2\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Donc l'ensemble des solutions de (E_0) l'équation homogène associée à (E) est

$$\mathscr{S}_{E_0} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C(1+x)^2\,\mathrm{e}^{-2x} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1+x)^2\,\mathrm{e}^{-2x} \end{array} \right).$$

Il n'est pas inutile de vérifier son résultat, si $y : x \mapsto (1+x)^2\,\mathrm{e}^{-2x}$,

$$\begin{aligned} y'(x) + \frac{2x}{1+x}y(x) &= 2(1+x)\,\mathrm{e}^{-2x} - 2(1+x)^2\,\mathrm{e}^{-2x} + 2x(1+x)\,\mathrm{e}^{-2x} \\ &= 2(1+x)\,\mathrm{e}^{-2x}(1-1-x+x) = 0 \qquad \mathit{OK.} \end{aligned}$$

Posons pour tout $x \in I$, $y_0(x) = (1+x)^2\,\mathrm{e}^{-2x}$. Soient y une fonction dérivable sur I et $\lambda = \frac{y}{y_0}$ qui est bien définie car y_0 ne s'annule pas sur I. De plus, y_0 est dérivable sur I donc par quotient, λ est bien dérivable sur I. De plus, $y = \lambda\, y_0$. Dès lors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad y'(x) + \frac{2x}{1+x}y(x) = (1+x)^2\,\mathrm{e}^x \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad \lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y_0'(x) + \frac{2x}{1+x}\,\lambda(x)y_0(x) = (1+x)^2\,\mathrm{e}^x \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad \lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)\underbrace{\left(y_0'(x) + \frac{2x}{1+x}y_0(x)\right)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_{F_0}} = (1+x)^3\,\mathrm{e}^x \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad \lambda'(x)(1+x)^2\,\mathrm{e}^{-2x} = (1+x)^3\,\mathrm{e}^x \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad \lambda'(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^{3x} \qquad \text{car } 1+x \neq 0 \text{ sur } I
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in I$, posons

$$F(x) = \int_2^x (1+t)\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $x \mapsto (1+x)\,\mathrm{e}^{3x}$ est continue sur I, par le théorème fondamental de l'analyse F existe, est même $\mathscr{C}^1$ et est une primitive de $x \mapsto (1+x)\,\mathrm{e}^{3x}$. Posons

$$\forall t \in I, \begin{cases} u(t) = \frac{\mathrm{e}^{3t}}{3} \\ v(t) = 1+t \end{cases}$$

Alors les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\forall t \in I, \begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^{3t} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$$

Donc par une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\forall x \in I, \qquad F(x) &= \left[(1+t)\,\frac{\mathrm{e}^{3t}}{3}\right]_{t=2}^{t=x} - \int_2^x \frac{\mathrm{e}^{3t}}{3}\,\mathrm{d}t \\
&= (1+x)\,\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} - \mathrm{e}^{6} - \left[\frac{\mathrm{e}^{3t}}{9}\right]_{t=2}^{t=x} \\
&= (1+x)\,\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} - \mathrm{e}^{6} - \frac{\mathrm{e}^{3x}}{9} + \frac{\mathrm{e}^{6}}{9} \\
&= \frac{3x+2}{9}\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{8\,\mathrm{e}^{6}}{9}.
\end{aligned}$$

Par suite, on obtient que

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (E) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in I, \qquad \lambda'(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^{3x} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \qquad \lambda(x) = \frac{3x+2}{9}\,\mathrm{e}^{3x} + C \\
\Leftrightarrow \quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \qquad y(x) = \lambda(x) y_0(x) = \left(\frac{3x+2}{9}\,\mathrm{e}^{3x} + C\right)(1+x)^2\,\mathrm{e}^{-2x}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{ccl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(\frac{3x+2}{9}\,\mathrm{e}^{3x} + C\right)(1+x)^2\,\mathrm{e}^{-2x}. \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$