Soit $f : x \mapsto \ln(2+\sin(x))$

$\sin(x) \underset{x\to0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(\cancel{x^4})$ v

On pose $U \underset{x\to0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$  Non à poser plus tard.

- $U \xrightarrow[x\to0]{} 0$
- $U^2 \underset{x\to0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2$

$U^2 \underset{x\to0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$

$$U^2 \underset{x\to0}{=} x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4) - \frac{x^4}{6} + o(x^4) + o(x^4)$$

$$\boxed{U^2 \underset{x\to0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)}$$

- $\boxed{U^3 \underset{x\to0}{=} x^3 + o(x^4)}$

$\ln(2+\sin(x)) \underset{x\to0}{=} \ln\left(2 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$ v

$\underset{x\to0}{=} \ln\left(2\left(1 + \underbrace{\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}}_{=u} + o(x^4)\right)\right)$ v

à reprendre ici

$\underset{x\to0}{=} \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)$ oui

$\underset{x\to0}{=} \ln 2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right)^3 + o(\cancel{x^4})$

$o(u^3) \underset{x\to0}{=} o(x^3)$

$\underset{x\to0}{=} \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{6}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{8}\right) + o(x^4)$

$\underset{x\to0}{=} \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{24} + o(x^4)$

$\underset{x\to0}{=} \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$

Exercice 2 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftrightarrow L_3$ Bof inutile.

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow -L_3$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftrightarrow L_3$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftrightarrow L_3$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow -L_3$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftrightarrow L_3$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

La matrice P est inversible et $P = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

A encadrer

<u>Vérification :</u>

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \text{ OK!}$$

Bien !

2) $P^{-1}AP$ :

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ ✓

A encadrer

3) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

OK cf corrigé et me redire si besoin.

4) Pour appliquer la formule du binôme de Newton, les matrices doivent être commutatives.

Ici :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Big\} \neq$ donc Non Commutative

Bien.