1) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \longmapsto \cos(e^x) + a\tan\left(\frac{x}{1+x}\right)$

On cherche le développement limité à l'ordre 3 de f en 0.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2)$ oui

donc $\frac{x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} x - x^2 + x^3 + o(x^3)$ ✓

Or $\tan(u) \underset{u\to 0}{=} u + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$

Posons $u = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$

- $u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

- $u^2 = (x - x^2 + x^3 + o(x^3))(x - x^2 + x^3 + o(x^3))$
  $= x^2 - x^3 + o(x^3) [- x^3 + o(x^3)]$ $+o(x^3)$
  $= x^2 - 2x^3 + o(x^3)$ ✓

- $u^3 = (x - x^2 + x^3 + o(x^3))(x^2 - 2x^3 + o(x^3))$
  $= x^3 + o(x^3)$ ✓

- $o(u^3) = o(x^3 + o(x^3))$
  $= o(x^3)$ oui

Forme triangulaire?

Donc $\tan\left(\frac{x}{1+x}\right) = (x - x^2 + x^3 + o(x^3)) + \frac{x^3 + o(x^3)}{3}$
$+ o(x^3)$
$= x - x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$ ✓

et $a\tan\left(\frac{x}{1+x}\right) = a\left(x - x^2 + \frac{4x^3}{3}\right) + o(x^3)$ ✓

on a aussi $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ ✓

et $\cos(u) \underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^3)$ ✓

Posons $u = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ $\underset{x\to 0}{\not\longrightarrow} 0$

$u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

A revoir.

• $U^2 = (1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3))(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3))$

$= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$

$+ x+x^2+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$

$+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$

$+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$

$= 1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+o(x^3)$

• $U^3 = (1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+o(x^3))(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3))$

$= 1+ x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$

$+2x+2x^2+x^3+o(x^3)$

$+2x^2+2x^3+o(x^3)$

$+\frac{4x^3}{3}+o(x^3)$

$= 1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x^3+o(x^3)$

• $o(U^3) = o(1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x^3+o(x^3))$

$= o(1)$

$\cos(e^x) \underset{x\to0}{=} 1 - \frac{(1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+o(x^3))}{2} + o(1)$

$\underset{x\to0}{=} 1-\frac{1}{2}\underbrace{-x-x^2-\frac{2x^3}{3}}_{=o(1)}+o(1)$

donc $f(x) \underset{x\to0}{=} \frac{1}{2}-x-x^2-\frac{2x^3}{3}+o(1)+a(x-x^2+\frac{4x^3}{3})+o(x^3)$

$\underset{x\to0}{=} \frac{1}{2}-x+ax-x^2-ax^2-\frac{2x^3}{3}+\frac{4ax^3}{3}+o(1)+o(x^3)$

$\underset{x\to0}{=} \frac{1}{2}-x(1-a)-x^2(1+a)-x^3(\frac{2}{3}-\frac{4}{3}a)+o(1)$

$\boxed{f(x) \underset{x\to0}{=} \frac{1}{2}+(\overset{a-1}{\cancel{1-a}})x+(-a-1)x^2+(\frac{4}{3}a-\frac{2}{3})x^3+o(1)}$

2) ici $a_1 = 0 \iff a = 1$ et $a=1 \Rightarrow a_2 = -2$

donc $\boxed{\text{f admet un maximum en 1}}$ car $a_1 = 0$ et $a_2 < 0$

Cohérent !

Posons $g = f'$ f dérivable ?

La fonction f est $\mathcal{C}^3$ aux alentours de 0 donc g est $\mathcal{C}^2$ et admet donc un ~~de~~ développement limité à l'ordre 2 ~~en~~ en 0

et $g(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$ oui

Par primitivation des développements limités

$f(x) \underset{x \to 0}{=} f(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ oui !

Par unicité du développement limités on a :

$$\begin{cases} f(0) = \frac{1}{2} \\ a_0 = 0 \\ \frac{a_1}{2} = -2 \\ \frac{a_2}{3} = \frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} f(0) = \frac{1}{2} \\ a_0 = 0 \\ a_1 = -4 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

bien ! V

donc $\boxed{g(x) = f'(x) \underset{x \to 0}{=} -4x + 2x^2 + o(x^2)}$ Bien cohérent.