Exercice 1 :

$$\operatorname{sh}(2x) \underset{x\to 0}{=} 2x + \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} + o(x^5) \quad ✓$$

$$\underset{x\to 0}{=} 2x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5) \quad ✓$$

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \quad \text{oui}$$

donc $$\frac{\operatorname{sh}(2x)}{\arctan(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{2x + \frac{4x^3}{3} + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)}{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)} \quad ✓$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{2 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{15}x^4 + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)} \quad \text{Bien}$$

Posons $u : x \longmapsto -\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)$ ✓

$$u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{OK !} \quad \text{oui}$$

$$\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2) \quad ✓$$

$$u^2 \underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)\right)\left(-\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)\right) \quad ✓$$

NON

$$\underset{x\to 0}{=} - \frac{x^4}{9} + o(x^4)$$

$$o(u^2) \underset{x\to 0}{=} o(x^4) \quad ✓$$

OK

donc $$\frac{\operatorname{sh}(2x)}{\arctan(x)} \underset{x\to 0}{=} \left(2 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{15}x^4 + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{3} - \frac{19}{45}x^4 + o(x^4)\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} 2 + \frac{2x^2}{3} - \frac{28}{45}x^4 + o(x^4)$$

$$\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{9}x^4 + o(x^4)$$

$$+ \frac{4}{15}x^4 + o(x^4)$$

$$\boxed{\underset{x\to 0}{=} 2 + 2x^2 + \frac{4}{45}x^4 + o(x^4)} \quad ✓$$

$+ o(x^4)$

Bien

Cohérent.

Exercice 2 :

Soit $f : x \mapsto x^4 \sin(\ln(x))$

La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et même continue sur cet intervalle. De plus, le sinus est défini et continu sur $\mathbb{R}$, de même pour la fonction $x \mapsto x^4$. Donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, les primitives de f sont données par :

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$$F(x) = \int_1^x t^4 \sin(\ln(t))\, dt + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Posons le changement de variable $t = e^y$ ✓

La fonction exponentielle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. oui

Calcul des bornes :

$t = 1 \iff y = \ln(1) = 0$ ✓

$t = x \iff y = \ln(x)$ ✓

Calcul du dy,

$dt \cancel{x} = \cancel{x}\, e^y\, dy$ ✓

On a alors :

$$\exists C \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^{\ln(x)} e^{4y} \sin(y) e^y\, dy + C = \int_0^{\ln(x)} e^{5y} \sin(y)\, dy + C$$ ✓

On pose $\forall y \in \mathbb{R}_+^{\cancel{*}}$ $\begin{cases} u(y) = -\cos(y) \\ v(y) = e^{5y} \end{cases}$, u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, non

ln(x) n'est pas forcément positif.

De plus $\forall y \in \mathbb{R}_+^{\cancel{*}}$ $\begin{cases} u'(y) = \sin(y) \\ v'(y) = 5e^{5y} \end{cases}$ ✓

Donc, par le théorème d'intégration par parties :

$$\int_0^{\ln(x)} e^{5y} \sin(y)\, dy = \left[-\cos(y) e^{5y}\right]_{y=0}^{y=\ln(x)} + 5\int_0^{\ln(x)} \cos(y) e^{5y}\, dy$$

Posons $\forall y \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} b(y) = \sin(y) \\ c(y) = e^{5y} \end{cases}$, b et c sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

De plus, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} b'(y) = \cos(y) \\ c'(y) = 5e^{5y} \end{cases}$

Donc, par le théorème d'intégration par parties :

$$\int_0^{\ln(x)} e^{5y}\sin(y)\,dy = \left[-\cos y\, e^{5y}\right]_{y=0}^{y=\ln(x)} + 5\left(\left[\sin(y)e^{5y}\right]_{y=0}^{y=\ln(x)} - 5\int_0^{\ln(x)} \sin(y)e^{5y}\,dy\right)$$

$$26\int_0^{\ln(x)} e^{5y}\sin(y)\,dy = \left[-\cos y\, e^{5y}\right]_{y=0}^{y=\ln(x)} + 5\left[\sin(y)e^{5y}\right]_{y=0}^{y=\ln(x)}$$

$$\int_0^{\ln(x)} e^{5y}\sin(y)\,dy = \frac{1}{26}\left(-\left(\cos(\ln(x))x^5\right) + 1 + 5\sin(\ln(x))x^5\right)$$ oui

donc

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \boxed{F(x) = \frac{1}{26}\left(-\cos(\ln(x))x^5 + 1 + 5\sin(\ln(x))x^5\right) + C}$$ ✓

Vérifions :

$$F'(x) = \frac{1}{26}\left(\sin(\ln(x))x^4 - 5\cos(\ln(x))x^4 + 5\cos(\ln(x))x^4 + 25\sin(\ln(x))x^4\right)$$

$$= \sin(\ln(x))x^4 = f(x)$$ ok ! Bien !

Voir le corrigé pour une méthode plus rapide en passant par les complexes.