Correction de l'exercice Noël 05
Primitives

Solution de l'exercice 1 D'une part, on sait que

$$\operatorname{sh}(2x) \underset{x\to 0}{=} 2x + \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} + o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{=} 2x + \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o\left(x^5\right).$$

D'autre part,

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right).$$

Donc

$$\frac{1}{\arctan(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o\left(x^4\right)\right)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o\left(x^4\right)}.$$

Posons $u \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o\left(x^4\right)$.

- Alors $u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,

$$\begin{aligned} u^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o\left(x^4\right)\right)\left(-\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o\left(x^4\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{9} + o\left(x^4\right). \end{aligned}$$

- Enfin, $o\left(u^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{x^4}{9} + o\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right)$.

Or $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + o\left(u^2\right)$. D'où,

$$\begin{array}{lllll} \frac{1}{1+u(x)} & \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{3} & -\frac{x^4}{5} & +o\left(x^4\right) \\ & & +\frac{x^4}{9} & +o\left(x^4\right) \\ & & & +o\left(x^4\right) \\ & \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{3} & -\frac{4x^4}{45} & +o\left(x^4\right). \end{array}$$

Par suite,

$$\begin{array}{lllll} f(x) & \underset{x\to 0}{=} \left(2x + \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o\left(x^5\right)\right)\frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{3} - \frac{4x^4}{45} + o\left(x^4\right)\right) & & & \\ & \underset{x\to 0}{=} \left(2 + \frac{4x^2}{3} + \frac{4x^4}{15} + o\left(x^4\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{3} - \frac{4x^4}{45} + o\left(x^4\right)\right) & & & \\ & \underset{x\to 0}{=} 2 & +\frac{2x^2}{3} & -\frac{8x^4}{45} & +o\left(x^4\right) \\ & & +\frac{4x^2}{3} & +\frac{4x^4}{9} & +o\left(x^4\right) \\ & & & +\frac{4x^4}{15} & +o\left(x^4\right) \\ & & & & +o\left(x^4\right) \\ & \underset{x\to 0}{=} 2 & +\frac{6x^2}{3} & -\frac{(-8+20+12)x^4}{45} & +o\left(x^4\right) \\ & \underset{x\to 0}{=} 2 & +2x^2 & -\frac{24x^4}{45} & +o\left(x^4\right). \end{array}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 2 + 2x^2 - \frac{8x^4}{15} + o\left(x^4\right).}$$

Solution de l'exercice 2 La fonction f est continue sur **l'intervalle** $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ dont l'une est donnée par le théorème fondamental de l'analyse par :

$$F : \qquad x \mapsto \int_1^x t^4 \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $t > 0$, $s = \ln(t)$ i.e. $t = \mathrm{e}^s$. Si $t = 1$, $s = 0$. Si $t = x$, $s = \ln(x)$. Enfin, $s \mapsto \mathrm{e}^s$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_1^x t^4 \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\ln(x)} \mathrm{e}^{4s} \sin(s)\,\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\ln(x)} \mathrm{e}^{5s}\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{is}\right)\mathrm{d}s \\
&= \mathrm{Im}\left(\int_0^{\ln(x)} \mathrm{e}^{5s+is}\,\mathrm{d}s\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(5+i)s}}{5+i}\right]_{s=0}^{s=\ln(x)}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{(5+i)\ln(x)} - 1}{5+i}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{\left[\mathrm{e}^{5\ln(x)}\left(\cos(\ln(x)) + i\sin(\ln(x))\right) - 1\right](5-i)}{26}\right) \\
&= \frac{x^5}{26}\left(-\cos(\ln(x)) + 5\sin(\ln(x))\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{rcl}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^5}{26}\left(5\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))\right) + K \end{array} \;\middle|\; K \in \mathbb{R} \right\}.}$$