Soit D_f le domaine de définition

Exercice 1 : Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln\left(x+1-\frac{\pi}{2}\right)}{|\cos(x)|}$.

f existe $\iff \begin{cases} x+1-\frac{\pi}{2} > 0 \\ |\cos(x)| \neq 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x > \frac{-2+\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \; k \in \mathbb{Z}$

~~Avec $k \in \mathbb{Z}$~~.

$D_f = \left]-\frac{2+\pi}{2} ; +\infty\right[\setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ oui

---

cherchons $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f(x)$. Posons $h = x - \frac{\pi}{2}$.

lorsque $x = \dfrac{-2+\pi}{2}$ $h = -1$

Si $x = \frac{\pi}{2}$ alors $h = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} |\cos(x)| = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \ln\left(x+1-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ problème !

D'où $\boxed{h = x - \frac{\pi}{2}}$

Cherchons donc :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \ln(h+1) = 0 \qquad \text{Ah !}$$

Peut être un développement limité ?

Essayons : À l'ordre 1.

$$\ln(h+1) \underset{h \to 0}{=} h + o(h) \quad \text{. oui !}$$

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = -\sin(h) = -h + o(h) \quad \ldots$$

Je ne comprends PAS.

Ok, cf corrigé.

Exercice 2.

Soit $x \in \mathbb{R}$. (I) $\dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 4} \leq -1$

(I) existe $\iff x^2 - 4 \neq 0$

$\iff x \neq 2$ ou $x \neq -2$. oui

Donc $x \in \mathbb{R} \setminus \{2 ; -2\}$.

$$(I) \quad \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 4} \leq -1$$

$$\iff \frac{x^3 - x^2 - 2x}{(x+2)(x-2)} \leq -1$$

$$\iff \frac{x(x^2 - x - 2)}{(x+2)(x-2)} \leq -1$$

$$\iff x \frac{x^2 - x - 2}{(x+2)(x-2)} \leq -1$$

Posons Δ le discriminant associé à

$x^2 - x - 2$.

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$x_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$ ✓

Reprenons les équivalences

$$x \frac{(x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} \leq -1$$ oui

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+1)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} \leq -1$$ Faux si $x=0$...

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{1+\frac{2}{x}} \leq -1$$ ✓

$$\Leftrightarrow x+1 \leq -1 - \frac{2}{x}$$ Faux si $1+\frac{2}{x} < 0$!

$$\Leftrightarrow x + \frac{2}{x} + 2 \leq 0$$ ✓

$$\Leftrightarrow x + \frac{2}{x} \leq 2$$ ✓

$$\boxed{\Leftrightarrow x \leq 1}$$

Je n'ai pas compris...

BONNE ANNÉE !

Bonne année !!!