Exercice 1 :

Soit $f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$

Comme $x \to +\infty$, on regarde le terme le plus important quand x devient très grand.
Le terme dominant est x^2, donc quand $x \to +\infty$, $x^2+4x+5 = x^2 + o(x^2)$.

On a donc $f(x) = \sqrt{x^2+4x+5} = \sqrt{x^2+o(x^2)}$

~~Alors~~ On a $x \to +\infty$ donc $\sqrt{x^2+o(x^2)} \underset{x\to+\infty}{=} x$?? Et le petit o ? A revoir.

Pour la position de la courbe, comme $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x$, quand x est très grand, $f(x)$ se comporte asymptotiquement comme une fonction linéaire $y=x$.
Comme $f(x)$ est définie comme positive et que la fonction racine carrée est une fonction croissante, dans ce cas $f(x)$ reste toujours au-dessus de sa droite d'asymptote $y=x$.

Conclusion : Au voisinage de $+\infty$, $f(x)$ reste au dessus de sa droite d'asymptote $y=x$

Exercice 2 :

~~Soit $x \in \mathbb{R}$~~, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = xe^x \sin(x)$ (E)

On a (E_0) l'équation homogène associée :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0 \quad (E_0)$$ oui

Son équation caractéristique

$$(E_c)\ \forall x \in \mathbb{R},\ r^2 - 2r + 2 = 0$$

Soit Δ le discriminant de (E_c), on a : $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times2 = -4$

Horreur !!!

On a donc : $r = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$

Donc, $\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto K_1 e^{(1+i)x} + K_2 e^{(1-i)x} \end{array} \middle| K \in \mathbb{C} \right\}$ complexe

$= \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{(1+i)x} \end{array}, \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{(1-i)x} \end{array} \right)$

Bien !

$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x (A\cos(x) + B\sin(x)) \end{array} \middle| (B,A) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x A\cos(x) \end{array} ; \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x B\sin(x) \end{array} \right)$

Cf corrigé pour la fin.