Correction de l'exercice Noël 08
Matrices

Solution de l'exercice 1 On sait que

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right).$$

Donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)}.$$

Or on sait que $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^5}{120} + o\left(u^5\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,

$$\begin{aligned}
u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{llll} x^2 & -\frac{x^4}{6} & +o\left(x^5\right) & \\ & -\frac{x^4}{6} & +o\left(x^5\right) & \\ & & +o\left(x^5\right) & \end{array}\\
&\underset{x\to 0}{=} x^2 - \tfrac{x^4}{3} + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

- De même,

$$\begin{aligned}
u(x)^3 &\underset{x\to 0}{=} u(x)u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(x^2 - \tfrac{x^4}{3} + o\left(x^5\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{llll} x^3 & -\frac{x^5}{3} & +o\left(x^5\right) & \\ & -\frac{x^5}{6} & +o\left(x^5\right) & \\ & & +o\left(x^5\right) & \end{array}\\
&\underset{x\to 0}{=} x^3 - \tfrac{x^5}{2} + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

- Et encore,

$$u(x)^4 \underset{x\to 0}{=} u(x)u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(x^3 - \frac{x^5}{6} + o\left(x^5\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^4 + o\left(x^5\right).$$

- Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, alors $u(x)^5 \underset{x\to 0}{\sim} x^5$ et donc $u(x)^5 \underset{x\to 0}{=} x^5 + o\left(x^5\right)$.
- Enfin, $o\left(u(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{u(x)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{lllll} 1 + x & -\frac{x^3}{6} & & +\frac{x^5}{120} & +o\left(x^5\right) \\ & +\frac{1}{2}(x^2 & -\frac{x^4}{3} & & +o\left(x^5\right)) \\ & & +\frac{1}{6}(x^3 & -\frac{x^5}{2} & +o\left(x^5\right)) \\ & & & +\frac{1}{24}(x^4 & +o\left(x^5\right)) \\ & & & +\frac{1}{120}(x^5 & +o\left(x^5\right)) \\ & & & & +o\left(x^5\right) \end{array}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{3x^4}{24} + \tfrac{2x^5}{120} - \tfrac{x^5}{12} + o\left(x^5\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{8} - \tfrac{8x^5}{120} + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + o\left(x^5\right).}$$

Solution de l'exercice 2 On a $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et par suite après calculs, $BC = CB = 0_3$. Puisque $C = A - B$, on a $A = B + C$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = (B + C)^n$. Or puisque $BC = CB$ les matrices B et C commutent. Donc par la formule de binôme de Newton, on a

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k C^{n-k}.$$

Si $n \geqslant 2$, en extrayant les termes de chaque bord, on obtient que

$$A^n = C^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} B^k C^{n-k} + B^n.$$

Les deux matrices étant commutatives, on peut aussi écrire que

$$\begin{aligned} A^n &= C^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \underbrace{BC}_{=O_3} B^{k-1} C^{n-k-1} + B^n && \text{car } k \geqslant 1 \text{ et } k \leqslant n-1 \\ &= C^n + O_3 + B^n && \text{car } BC = O_3 \\ &= B^n + C^n. \end{aligned}$$

On observe que cette formule reste vraie si $n = 1$ par définition de C. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A^n = B^n + C^n.}$$