Correction de l'exercice Noël 09
Systèmes linéaires

Solution de l'exercice 1 La fonction f est définie sur $U =]-1;0[\cup]0;+\infty[$ qui est bien un voisinage de 0. De plus, on a les égalités asymptotiques suivantes :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$
$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) - x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)}{x} \\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)}{x} \\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right). \end{aligned}$$

On en déduit notamment que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 0.$$

Donc

$$\boxed{f \text{ est bien prolongeable par continuité en 0 en posant } f(0) = 0.}$$

De plus, par le développement limité précédent, on obtient également que

$$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ admet pour tangente en 0 la droite } y = -\frac{x}{2}.}$$

Enfin, on a

$$f(x) + \frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

Or deux équivalents ont même signe au voisinage considéré et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2}{2} \geqslant 0$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est au-dessus de sa tangente } \textbf{au voisinage} \text{ de 0.}}$$

Solution de l'exercice 2 Soit $m \in \mathbb{R}$. On applique l'algorithme du pivot de Gauss. On a les équivalences

suivantes

$$(\mathcal{S}_m)\ :\quad \begin{cases} mx+y+z+t=1 \\ x+my+z+t=m \\ x+y+mz+t=m+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+my+z+t=m \\ mx+y+z+t=1 \\ x+y+mz+t=m+1 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+my+z+t=m \\ (1-m^2)\,y+(1-m)\,z+(1-m)\,t=1-m^2 \\ (1-m)\,y+(m-1)\,z=1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+my+z+t=m \\ (1-m)\,y+(m-1)\,z=1 \\ (1-m^2)\,y+(1-m)\,z+(1-m)\,t=1-m^2 \end{cases} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+my+z+t=m \\ (1-m)\,y+(m-1)\,z=1 \\ (1-m-(1+m)\,(m-1))\,z+(1-m)\,t=1-m^2-(1+m) \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3-(1+m)\,L_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+my+z+t=m \\ (1-m)\,y+(m-1)\,z=1 \\ (1-m)\,(1+1+m)\,z+(1-m)\,t=(1+m)\,(1-m-1) \end{cases} \qquad \textit{on factorise toujours lorsque c'est possible !}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+my+z+t=m \\ (1-m)\,y+(m-1)\,z=1 \\ (1-m)\,(2+m)\,z+(1-m)\,t=-m\,(1+m) \end{cases}$$

Premier cas : $m=1$. Alors,

$$(\mathcal{S}_1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 0=1 \\ 0=-2 \end{cases} \qquad \text{impossible}$$

Dans ce cas,

$$\boxed{\mathscr{S}_1=\emptyset}$$

Deuxième cas, $m \neq 1$. Alors,

$$(\mathcal{S}_m) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + my + z + t = m \\ (1-m)\,y + (m-1)\,z = 1 \\ (2+m)\,z + t = -\frac{m(1+m)}{1-m} \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{1-m} L_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = m - my - z - t = m - \frac{m}{1-m} - mz - z + \frac{m(1+m)}{1-m} + (2+m)\,z \\ y = \frac{1-(m-1)z}{1-m} = \frac{1}{1-m} + z \\ t = -\frac{m(1+m)}{1-m} - (2+m)\,z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{m-m^2-m+m+m^2}{1-m} + z \\ y = \frac{1}{1-m} + z \\ t = -\frac{m(1+m)}{1-m} - (2+m)\,z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{m}{1-m} + z \\ y = \frac{1}{1-m} + z \\ t = -\frac{m(1+m)}{1-m} - (2+m)\,z \end{cases}$$

Conclusion, si $m \neq 1$,

$$\boxed{\mathscr{S}_m = \left\{ \left(\frac{m}{1-m} + z, \frac{1}{1-m} + z, z, -\frac{m\,(1+m)}{1-m} - (2+m)\,z \right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Vérification, si $z = 1$, par exemple, on a $x = \frac{1}{1-m}$, $y = \frac{2-m}{1-m}$, $z = 1 = \frac{1-m}{1-m}$, $t = \frac{-m-m^2-2-m+2m+m^2}{1-m} = -\frac{2}{1-m}$. Alors, en reprenant le système initial : $\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m + 1. \end{cases}$, on a

$$\begin{cases} \frac{m+2-m+1-m-2}{1-m} = \frac{1-m}{1-m} = 1 \\ \frac{1+2m-m^2+1-m-2}{1-m} = \frac{m-m^2}{1-m} = m \\ \frac{1+2-m+m-m^2-2}{1-m} = \frac{1-m^2}{1-m} = 1+m \end{cases} \qquad \textit{OK !}$$