# Correction de l'exercice Noël 10
# Analyse asymptotique

**Solution de l'exercice 1**

1. On sait que $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$. De même $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 3\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} &\underset{x\to 0}{=} 3 + 3x + 3\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 4 + 2x + 2x^2 + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Dès lors, on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(4 + 2x + 2x^2 + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \ln(4) + \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right).$$

Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)$. Alors, $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)$.

- On a

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(\tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right)\left(\tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{lll} \frac{x^2}{4} & +\frac{x^3}{4} & +o\left(x^3\right) \\ & +\frac{x^3}{4} & +o\left(x^3\right) \\ & & +o\left(x^3\right) \end{array} \\ &\underset{x\to 0}{=} \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{x^3}{2} + o\left(x^3\right) \end{aligned}$$

- De plus, $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$ donc par élévation à la puissance,

$$u(x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{8} \qquad \text{i.e.} \qquad u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right).$$

- Enfin, $o\left(u(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(4) + \ln\left(1 + \tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right) \\ &= \ln(4) + \begin{array}{llll} \frac{x}{2} & +\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{12} & +o\left(x^3\right) \\ & -\frac{1}{2}(\frac{x^2}{4} & +\frac{x^3}{2} & +o\left(x^3\right)) \\ & & +\frac{1}{3}(\frac{x^3}{8} & +o\left(x^3\right)) \\ & & & +o\left(x^3\right) \end{array} \\ &= \ln(4) + \begin{array}{llll} \frac{x}{2} & +\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{12} & +o\left(x^3\right) \\ & -\frac{x^2}{8} & -\frac{x^3}{4} & +o\left(x^3\right)) \\ & & +\frac{x^3}{24} & +o\left(x^3\right)) \\ & & & +o\left(x^3\right) \end{array} \\ &= \ln(4) + \tfrac{x}{2} + \tfrac{3x^2}{8} + \tfrac{2-6+1}{24}x^3 + o\left(x^3\right) \\ &= \ln(4) + \tfrac{x}{2} + \tfrac{3x^2}{8} - \tfrac{x^3}{8} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) = \ln(4) + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right).}$$

2. De la question précédente, on en déduit que

$$\boxed{f \text{ admet une tangente d'équation } y = \ln(4) + \frac{x}{2}.}$$

De plus,

$$f(x) - \left(\ln(4) + \frac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3x^2}{8}.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{3x^2}{8} \geqslant 0$ et deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré. Ainsi,

$$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est au-dessus de sa tangente en 0, au voisinage de 0.}}$$

3. La fonction $f$ est définie et même $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. Donc $f'$ existe et est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème de Taylor-Young, il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o\left(x^2\right).$$

Donc par primitivation du développement limité,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

Or par la question 1

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(4) + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right).$$

Donc par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} f(0) = \ln(4) \text{ OK} \\ a_0 = \frac{1}{2} \\ \frac{a_1}{2} = \frac{3}{8} \\ \frac{a_2}{3} = -\frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_1 = \frac{3}{4} \\ a_2 = -\frac{3}{8}. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{3x^2}{8} + o\left(x^2\right).}$$

4. Par factorisation, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln\left(3\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^x\left(3 + \mathrm{e}^{-2x}\right)\right) = x + \ln\left(3 + \mathrm{e}^{-2x}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \ln\left(3 + \mathrm{e}^{-2x}\right).}$$

5. La fonction $f$ est dérivable sur son domaine de définition : $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 + \frac{-2\,\mathrm{e}^{-2x}}{3 + \mathrm{e}^{-2x}} = 1 - 2\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{3 + \mathrm{e}^{-2x}}.$$

6. On a

$$\mathrm{e}^{-2x} \underset{x\to 0}{=} 1 - 2x + \frac{4x^2}{2} + o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - 2x + 2x^2 + o\left(x^2\right).$$

Donc

$$\frac{1}{3 + \mathrm{e}^{-2x}} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{4 - 2x + 2x^2 + o\left(x^2\right)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{4}\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)}.$$

Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- Puis,
$$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right).$$
- Enfin, $o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$.

Ainsi,
$$\begin{aligned}\frac{1}{3+\mathrm{e}^{-2x}} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{4}\frac{1}{1+u}\\ &\underset{x\to 0}{=} \tfrac{1}{4}(1+\tfrac{x}{2} \quad -\tfrac{x^2}{2} \quad +o\left(x^2\right)\\ &\qquad\qquad\qquad +\tfrac{x^2}{4} \quad +o\left(x^2\right)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +o\left(x^2\right))\\ &\underset{x\to 0}{=} \tfrac{1}{4}+\tfrac{x}{8} \quad -\tfrac{x^2}{16} \quad +o\left(x^2\right).\end{aligned}$$

Donc
$$\begin{aligned}f'(x) &\underset{x\to 0}{=} 1-2\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{3+\mathrm{e}^{-2x}}\\ &\underset{x\to 0}{=} 1-2\left(1-2x+2x^2+o\left(x^2\right)\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{x}{8}-\frac{x^2}{16}+o\left(x^2\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1+\left(-2+4x-4x^2+o\left(x^2\right)\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{x}{8}-\frac{x^2}{16}+o\left(x^2\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1-\tfrac{1}{2} \quad -\tfrac{x}{4} \quad +\tfrac{x^2}{8} \quad +o\left(x^2\right)\\ &\qquad\qquad +x \quad +\tfrac{x^2}{2} \quad +o\left(x^2\right)\\ &\qquad\qquad\qquad -x^2 \quad +o\left(x^2\right)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +o\left(x^2\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \tfrac{1}{2} \quad +\tfrac{3x}{4} \quad -\tfrac{3x^2}{8} \quad +o\left(x^2\right)\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien que
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}+\frac{3x}{4}-\frac{3x^2}{8}+o\left(x^2\right).}$$

7. (a) On sait que $f$ est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=1-2\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{3+\mathrm{e}^{-2x}}$. Donc
$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad f''(x) &= -2\frac{-2\,\mathrm{e}^{-2x}\left(3+\mathrm{e}^{-2x}\right)-\mathrm{e}^{-2x}\left(-2\,\mathrm{e}^{-2x}\right)}{\left(3+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2}\\ &= 4\,\mathrm{e}^{-2x}\,\frac{3+\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-2x}}{\left(3+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2}\\ &= \frac{12\,\mathrm{e}^{-2x}}{\left(3+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2}.\end{aligned}$$

Puis,
$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad f'''(x) &= 12\frac{\left(-2\,\mathrm{e}^{-2x}\right)\left(3+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2-\mathrm{e}^{-2x}\,2\left(-2\,\mathrm{e}^{-2x}\right)\left(3+\mathrm{e}^{-2x}\right)}{\left(3+\mathrm{e}^{-2x}\right)^4}\\ &= -24\,\mathrm{e}^{-2x}\left(3+\mathrm{e}^{-2x}\right)\frac{3+\mathrm{e}^{-2x}+(-2)}{\left(3+\mathrm{e}^{-2x}\right)^4}\\ &= -24\,\mathrm{e}^{-2x}\,\frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{\left(3+\mathrm{e}^{-2x}\right)^3}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \frac{12\,\mathrm{e}^{-2x}}{(3+\mathrm{e}^{-2x})^2}, \qquad f'''(x) = -24\,\mathrm{e}^{-2x}\,\frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{(3+\mathrm{e}^{-2x})^3}.$$

(b) Par ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
f(0) &= \ln(3+1) = \ln(4)\\
f'(0) &= 1 - 2\frac{1}{3+1} = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}\\
f''(0) &= \frac{12}{4^2} = \frac{3}{4}\\
f'''(0) &= -24\frac{2}{4^3} = -6\frac{2}{4^2} = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Puisque $f$ est $\mathscr{C}^3$, par la formule de Taylor-Young,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \ln(4) + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{24}x^3 + o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \ln(4) + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 1

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(4) + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right).}$$