Exo 1 :

1) X_1 correspond au résultat d'une expérience équiprobable contenant que 3 issues : 0, 1 et 2

Non Doudou dort à l'étape 0. Et comme Doudou doit changer d'activité, cela veut dire que Doudou ne peut pas dormir à l'étape 1

$\Rightarrow \boxed{X_1 \sim \mathcal{U}([\![0,2]\!])}$

2) $(X_2 = 0)$ a que trois événements
- Il dort sachant qu'il a dormi au 1ère étape
- il dort sachant qu'il a mangé au 1ère étape
- il dort sachant qu'il a trotté au 1ère étape

Or toutes les activités sont équiprobables à chaque étapes donc :

Il faut citer le théorème des probabilités totales avec son hypothèse.

$p(X_2=0) = p(X_2=0, X_1=0) + p(X_2=0, X_1=1) + p(X_2=0, X_1=2)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$

$\boxed{P(X_2=0) = \frac{1}{3}}$

Tu ne prends pas en compte la consigne que Doudou change d'activité nécessairement à chaque étape.

3) X_2 correspond au résultat d'une expérience équiprobable contenant que 3 issues : 0, 1 et 2

$\Rightarrow \boxed{X_2 \sim \mathcal{U}([\![0,2]\!])}$ Cohérent.

Bien.

4a) $A_n = (X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, X_3 \neq 0, \dots, X_n = 0)$

b) si $n > 1$, à chaque étape entre 2 et n, il a une chance sur trois de dormir et il dort initialement donc

A détailler en utilisant la formule des probabilités composées.

$$\boxed{P(A_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

c) Ainsi $\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = 0}$ Oui.

~~Exo2~~ Exo 2 :

Soit $t \longmapsto \dfrac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}$ est définie et continue sur $[0,\pi]$ car... donc (par le théorème Non. de l'analyse) I existe.

$$\int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt$$

On a : $s = \pi - t \Leftrightarrow t = \pi - s$ ✓

Or $s \mapsto \pi - s$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$

oui !

donc $dt = -ds$ bien.

si $t = \pi$ alors $s = 0$

si $t = 0$ alors $s = \pi$ ✓

Ainsi, par la formule de changement de variable

$$I = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - s)\sin(\pi - s)}{1+\cos^2(\pi - s)}\,ds \quad \text{oui !}$$

$$= +\int_0^{\pi} \frac{(\pi - s)\sin(s)}{1+\cos^2(s)}\,ds \; ✓$$

Soin !

$$I = \underbrace{\pi\int_0^{\pi} \frac{\sin(s)}{1+\cos^2(s)}\,ds}_{A} \; - \; \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{s\sin(s)}{1+\cos^2(s)}\,ds}_{B}$$

• Résolvons A : Par changement de variable

On pouvait être plus direct mais OK !

Posons $t = \cos(s) \Leftrightarrow t^2 = \cos^2(s)$ ✓

$s \mapsto \cos(s)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ donc ✓ oui

$dt = -\sin(s)\,ds$ ✓ $\Leftrightarrow ds = -\frac{1}{\sin(s)}\,dt$

Ainsi, Bien.

$$A = \pi\int_1^{-1} -\frac{1}{1+t^2}\,dt = \pi\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,dt \; ✓$$

$$A = \pi\left[\arctan(t)\right]_{-1}^{1} = \pi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2} \; ✓ \quad \text{Oui}$$

Inutile, car B = I.

• Résolvons (B) : intégration par partie

Posons $\begin{cases} u(s) = s \\ v' = +\dfrac{\sin(s)}{1+\cos^2(s)} \end{cases}$

On ne peut pas DEFINIR v'. On pose v et ensuite on en déduit v'.

u et ~~v'~~ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$

donc $\begin{cases} (du = ds) \\ v(s) = -\arctan(\cos(s)) \end{cases}$

$u'(s) = 1$

Ainsi par la formule d'intégration par partie : On a

$$B = \left[-s\arctan(\cos(s))\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} + \arctan(\cos(s))\,d$$

✓

OK ! Cf corrigé.

$$= -\pi\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \left[\frac{1}{}\right.$$