Exercice Printemps 05
Probabilités / Calcul d'intégrales

Solution de l'exercice 1

1. Puisque Doudou dort initialement et qu'il change d'activité toutes les heures, à l'étape 1 il mange ou il trotte. Puisque son choix est équiprobable, on en déduit que

$$\boxed{X_1 \sim \mathscr{U}\left(\llbracket 1;2\rrbracket\right).}$$

Autrement dit $X_1(\Omega) = \llbracket 1;2\rrbracket$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$.

2. On sait que $(X_1 = i)_{i\in\llbracket 1;2\rrbracket}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 2)\,\mathbb{P}(X_1 = 2).$$

On a déjà vu que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$. D'autre part, si $(X_1 = 1)$ est réalisé, alors, Doudou mange à l'étape 1. Il a donc une chance sur deux à l'étape 2 de dormir et une chance sur deux de trotter. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

De même, $\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 2) = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{1}{2}.}$$

3. Puisque à l'étape 1, Doudou mange ou trotte, il peut à l'étape 2 dormir, manger ou trotter : $X_2(\Omega) = \llbracket 0;2\rrbracket$. Par la question précédente, $\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{1}{2}$. De la même façon, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 2)\,\mathbb{P}(X_1 = 2)\\ &= 0\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

On peut procéder de même pour $\mathbb{P}(X_2 = 2)$ ou observer que

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 0) - \mathbb{P}(X_2 = 1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Conclusion, la loi de X_2 est donnée par le tableau suivant :

i	0	1	2
$\mathbb{P}(X_2 = i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

4. Soit A_n l'évènement « Doudou retourne dormir pour la première fois à l'étape $n \in \mathbb{N}^*$ ».
   (a) Pour que Doudou ne retourne pas dormir durant les $n-1$ premières étapes mais dorme à l'étape n, on a

$$\boxed{A_n = (X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, \dots, X_{n-1} \neq 0, X_n = 0).}$$

(b) Par la formule des probabilités composées, on a

$$\mathbb{P}\left(A_n\right)=\mathbb{P}\left(X_n=0 \mid X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, \ldots, X_{n-1} \neq 0\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_2 \neq 0 \mid X_1 \neq 0\right) \mathbb{P}\left(X_1 \neq 0\right).$$

Or $\mathbb{P}(X_1 \neq 0)=1$. De plus, sachant que Doudou ne dort pas à l'étape 1, (il mange ou il trotte) alors Doudou va choisir de façon équiprobable ou bien d'aller dormir ou bien de faire l'autre activité (trotter s'il mangeait, manger s'il trottait). Donc $\mathbb{P}\left(X_2 \neq 0 \mid X_1 \neq 0\right)$. De même pour tout $k \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$,

$$\mathbb{P}\left(X_k=0 \mid X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, \ldots, X_{k-1} \neq 0\right)=\frac{1}{2}.$$

Enfin, $\mathbb{P}\left(X_n=0 \mid X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, \ldots, X_{n-1} \neq 0\right)=\frac{1}{2}$. Donc,

$$\mathbb{P}\left(A_n\right)=\frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times 1=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}\left(A_n\right)=\frac{1}{2^{n-1}}.}$$

(c) En particulier,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right)=0.$$

Sérieusement, vous pensiez que Doudou ne retournerait jamais dormir ? Non, la probabilité que Doudou ne retourne dormir qu'en temps infini est nulle. Autrement dit Doudou va retourner dormir avec une probabilité de 1 (et même exponentiellement vite, ce qui est logique pour qui connaît Doudou).

Solution de l'exercice 2 Soit $f : t \mapsto \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1+\cos^2(t) \geqslant 1 > 0$. Donc f est bien définie et même continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0;\pi]$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi,

$$\boxed{I \text{ existe.}}$$

Posons $s=\pi-t$ i.e. $t=\pi-s$. Quand $t=0$, $s=\pi$, quand $t=\pi$, $s=0$. De plus la fonction $s \mapsto \pi - s$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi]$ et $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}s$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_\pi^0 \frac{(\pi-s)\sin(\pi-s)}{1+\cos^2(\pi-s)}(-1)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^\pi \frac{(\pi-s)\sin(s)}{1+(-\cos(s))^2}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^\pi (\pi-s)\frac{\sin(s)}{1+\cos^2(s)}\,\mathrm{d}s \\
&= \pi\int_0^\pi \frac{\sin(s)}{1+\cos^2(s)}\,\mathrm{d}s - I.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin(s)}{1+\cos^2(s)}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{\pi}{2}\left[-\arctan(\cos(s))\right]_{s=0}^{s=\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}\left(-\arctan(-1)+\arctan(1)\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{4}.}$$