Correction de l'exercice Printemps 06
Intégration / Equations complexes

Solution de l'exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u = f$ et $v : t \mapsto \frac{-\cos(nt)}{n}$.Par hypothèse u est $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ et v étant $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ est notamment $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. De plus pour tout $t \in [a;b]$,

$$u'(t) = f'(t) \qquad \text{et} \qquad v'(t) = \sin(nt).$$

Donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f'(t)\frac{-\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(a)\cos(na) - f(b)\sin(nb)}{n} + \int_a^b f'(t)\frac{\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Majorons maintenant la valeur absolue de cette expression par une suite convergeant vers 0 pour montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Par l'inégalité triangulaire, puisque $a < b$,

$$\begin{aligned} |I_n| &\leqslant \left|\frac{f(a)\cos(na) - f(b)\sin(nb)}{n}\right| + \left|\int_a^b f'(t)\frac{\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{|f(a)|\,|\cos(na)| + |f(b)|\,|\sin(nb)|}{n} + \int_a^b |f'(t)|\,\frac{|\cos(nt)|}{n}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or $|\cos(na)| \leqslant 1$, $|\sin(nb)| \leqslant 1$, et pour tout $t \in [a;b]$, $|\cos(nt)| \leqslant 1$. Donc

$$|I_n| \leqslant \frac{|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t}{n}.$$

Posons $M = |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ et observons (c'est important) que M ne dépend pas de n. Par conséquent,

$$0 \leqslant |I_n| \leqslant \frac{M}{n}.$$

Donc par le théorème d'encadrement $|I_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

NB : on pouvait continuer à majorer M. Puisque f est $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$, f' est continue sur $[a;b]$ et est donc bornée (et atteint ses bornes) sur $[a;b]$. Posons $N = \sup_{s\in[a;b]} |f'(s)|$. On a alors par croissance de l'intégrale

$$M\,|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b N\,\mathrm{d}t = |f(a)| + |f(b)| + (b-a)N.$$

Solution de l'exercice 2 Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $\omega = z^3$. Alors

$$(E)\ :\ (1+i)\,z^6 - (2-i)\,z^3 - i = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (1+i)\,\omega^2 - (2-i)\,\omega - i = 0.$$

Soit Δ le discriminant associé. On a

$$\Delta = (2-i)^2 - 4\,(1+i)\,(-i) = 4 - 4i - 1 + 4i - 4 = -1.$$

Donc les racines carrées de Δ sont i et $-i$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
(E) \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \omega = \frac{2-i-i}{2(1+i)} = \frac{2(1-i)^2}{2\times 2} = \frac{1-2i-1}{2} = -i \\ \text{OU} \\ \omega = \frac{2-i+i}{2(1+i)} = \frac{1-i}{2} \end{array} \\
& \Leftrightarrow \quad z^3 = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \text{OU} \quad z^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2^{1/2}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;2]\!],\ z = \mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \quad \text{OU} \quad z = \frac{1}{2^{1/6}}\,\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}
\end{aligned}
$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}; i; \mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{2}}; \frac{1}{2^{1/6}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{12}}; \frac{1}{2^{1/6}}\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}}; \frac{1}{2^{1/6}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}\right\}.}$$

On peut vérifier facilement que i fonctionne : si $z = i$,

$$(1+i)\,i^6 - (2-i)\,i^3 - i = (1+i)\,(-1)^3 + i\,(2-i) - i = -1 - i + 2i + 1 - i = 0. \quad \textit{OK!}$$

Si $z = \frac{1}{2^{1/6}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{12}}$ par exemple, on a

$$
\begin{aligned}
(1+i)\,\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} - (2-i)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} - i &= (1+i)\,\frac{-i}{2} - (2-i)\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - i \\
&= \frac{-i+1}{2} - (2-i)\,\frac{1-i}{2} - i \\
&= \frac{-i+1-2+i+2i+1-2i}{2} \\
&= 0 \ \textit{OK!}
\end{aligned}
$$